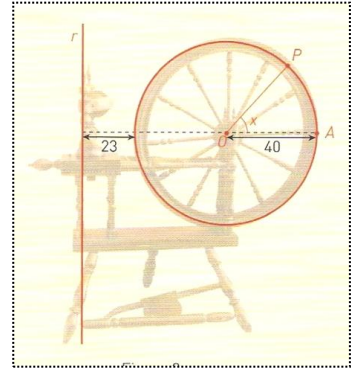


Correção do teste – Versão 1

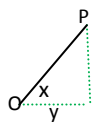
1. A figura ao lado é a representação em esquema da roda da roca de fiar.



Relativamente ao esquema representado na figura, sabe-se que:

- Os comprimentos são expressos em centímetros;
- P é um ponto fixo da roda que a acompanha no seu movimento de rotação em torno do ponto O;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP;
- as retas r e AO são perpendiculares;
- $\overline{OA} = 40$.

Seja d a função que a cada valor de x faz corresponder a distância do ponto P à reta r .



1.1. Mostra que $d(x) = 63 + 40\cos x$.

$$\text{Quando } x \text{ é um ângulo agudo, } \cos x = \frac{y}{OP} \Leftrightarrow \cos x = \frac{y}{40} \Leftrightarrow y = 40\cos x$$

$$d(x) = 23 + r + y \Leftrightarrow d(x) = 23 + 40 + 40\cos x \Leftrightarrow d(x) = 63 + 40\cos x$$

Quando x não é um ângulo agudo, por um processo semelhante e com base no círculo trigonométrico, obtemos a mesma expressão.

1.2. Calcula o valor exato de $d\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ e interpreta-o no contexto do problema.

$$d\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 63 + 40\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow d\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 63 + 40\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow d\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 63 - 20\sqrt{3}, \text{ representa a distância do ponto P à reta } r \text{ quando o ângulo é de } \frac{5\pi}{6}$$

1.3. Sem recorrer à calculadora, resolve, em \mathbb{R} , a equação $d(x) = 83$.

$$d(x) = 83 \Leftrightarrow 63 + 40\cos x = 83 \Leftrightarrow 40\cos x = 20 \Leftrightarrow \cos x = 0,5 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Determina o valor de $3 - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{4}{5}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$$

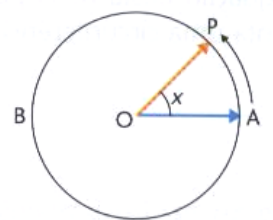
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ e } \alpha \in 1^\circ Q$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3} \quad \text{Assim, } 3 - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 3 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

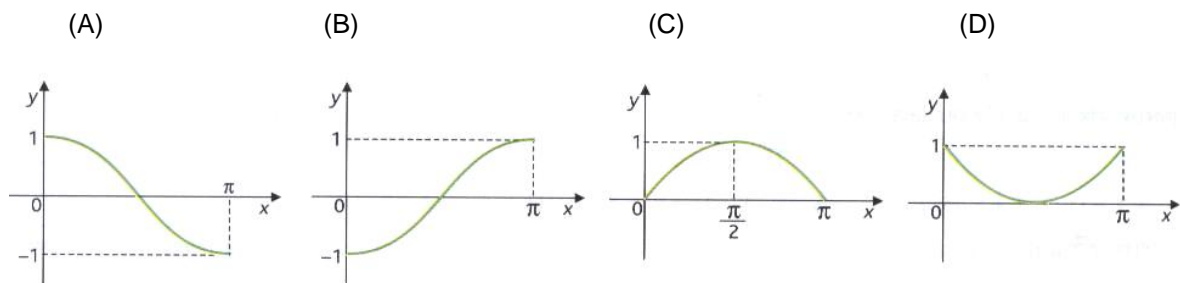
3. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 1. Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência. Considera que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre o arco AB, terminando o seu percurso em B. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.

Seja f a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o produto escalar

$\vec{OA} \bullet \vec{OP}$. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f ?



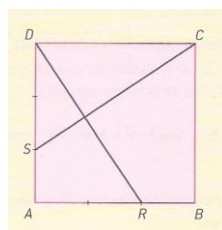
Numa pequena composição, explica as razões que te levaram a rejeitar os outros três gráficos, apresentando uma razão por cada gráfico.



Como $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OP}\| \times \cos(\widehat{OA \hat{ } OP}) = 1 \times 1 \times \cos x$, verifica-se que o gráfico (B) não está correto uma vez que quando o ângulo x é agudo o produto escalar tem de ser positivo, o que não acontece neste gráfico. O gráfico C e o D não estão corretos uma vez que quando o ângulo x é obtuso, o produto escalar tem de ser negativo e nestes dois gráficos não se verifica esta situação.

4. Na figura está representado um quadrado ABCD] de lado 3. Sabe-se que:

- $\vec{AR} = \frac{2}{3} \vec{AB}$
- $\vec{AS} = \frac{1}{3} \vec{AD}$



Mostra que os vetores \vec{SC} e \vec{DR} são perpendiculares.

Sugestão: Começa por exprimir os vetores \vec{SC} e \vec{DR} como uma soma de dois vetores.

$$\vec{SC} \cdot \vec{DR} = (\vec{SD} + \vec{DC}) \cdot (\vec{DA} + \vec{AR}) = \vec{SD} \cdot \vec{DA} + \vec{SD} \cdot \vec{AR} + \vec{DC} \cdot \vec{DA} + \vec{DC} \cdot \vec{AR} =$$

$$= 2 \times 3 \times \cos 180^\circ + 0 + 0 + 2 \times 3 \times \cos 0^\circ = -6 + 6 = 0$$

5. Considera num referencial o.n. xOy , as retas r e s , definidas, respetivamente, por:

$$r: (x, y) = (1, 3) + k(2, 0), \quad k \in \mathbb{R} \quad s: y = \frac{3}{4}x + 1$$

5.1. Determina, em graus, a amplitude do ângulo das duas retas. Apresenta o valor arredondado às unidades.

$$\vec{r}(2,0) \quad \|\vec{r}\| = 2 \quad \vec{s}(4,3) \quad \|\vec{s}\| = 5 \quad \vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times 4 + 3 \times 0 = 8 \quad \cos(\widehat{r \hat{ } s}) = \frac{8}{2 \times 5} \quad \cos^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) \approx 37^\circ,$$

o ângulo das duas retas é de 37° .

5.2. Determina uma equação da reta que passa pelo ponto $A(-2, 3)$ e é perpendicular à reta s . Um vetor perpendicular à reta s é $\vec{p}(-3, 4)$

$$\text{A equação reduzida é } y = -\frac{4}{3}x + b, \text{ substituindo pelo ponto, vem } 3 = -\frac{4}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow 3 = \frac{8}{3} + b \Leftrightarrow$$

$$3 - \frac{8}{3} = b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3} \quad \text{a equação da reta fica } y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

6. Determina uma equação do plano tangente à superfície esférica definida por

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 21, \text{ no ponto T de coordenadas } (3, 1, 0).$$

$\vec{CT} = T - C = (3, 1, 0) - (-1, 0, 2) = (4, 1, -2)$, o vetor \vec{CT} é perpendicular ao plano tangente

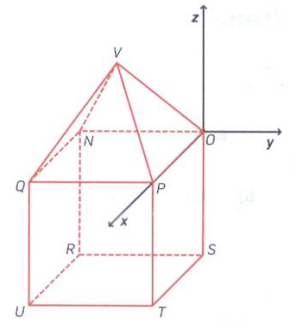
$$4x + y - 2z + d = 0, \text{ substituindo as coordenadas do ponto T, obtemos } 4 \times 3 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -13$$

Equação do plano: $4x + y - 2z - 13 = 0$.

7. Na figura, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQRST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$
- o plano QTV é definido pela equação $15x + 6y + 6z = 36$



- 7.1.** Quais as coordenadas do vetor normal ao plano QTV ? E do ponto V ?

Vetor perpendicular ao plano $\vec{v} = (15, 6, 6)$; $V(2, -2, z)$

Substituindo as coordenadas de V na equação do plano QTV obtemos a coordenada z que falta no vértice V

$$15 \times 2 + 6 \times (-2) + 6z = 36 \Leftrightarrow z = 3 \quad V(2, -2, 3)$$

- 7.2.** Quais as coordenadas dos pontos em que o plano QTV intersecta os eixos do referencial?

Interseção com eixo Ox : $(x, 0, 0)$ $15x + 0y + 0z = 36 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}$, ponto de coordenadas $(\frac{12}{5}, 0, 0)$

Interseção com eixo Oy : $(0, y, 0)$ $0x + 6y + 0z = 36 \Leftrightarrow y = 6$, ponto de coordenadas $(0, 6, 0)$

Interseção com eixo Oz : $(0, 0, z)$ $0x + 0y + 6z = 36 \Leftrightarrow z = 6$, ponto de coordenadas $(0, 0, 6)$

- 7.3.** Escreve a equação cartesiana do plano perpendicular ao vetor \overrightarrow{TN} e que passa no ponto V .

$\overrightarrow{TN} = N - T = (0, -4, 0) - (4, 0, -4) = (-4, -4, 4)$ equação do plano: $-4x - 4y + 4z + d = 0$,

substituindo as coordenadas do ponto do plano, obtemos $-4 \times 2 - 4 \times (-2) + 4 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$,

a equação do plano fica $-4x - 4y + 4z - 12 = 0$

- 7.4.** Considere um ponto A , com a mesma abscissa e com a mesma ordenada do ponto U . Sabe-se

que $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OT} = 8$. Determina a cota do ponto A .

$$A(4, -4, z) \quad \overrightarrow{OA} = (4, -4, z) \quad \overrightarrow{OT} = (4, 0, -4) \quad \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OT} = 8 \Leftrightarrow 16 - 4z = 8 \Leftrightarrow z = 2 \quad A(4, -4, 2)$$