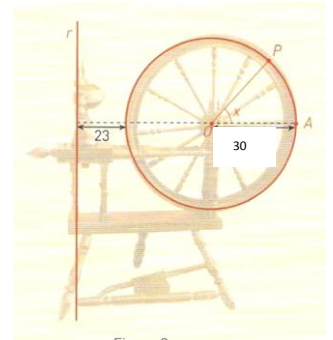


1. A figura ao lado é a representação em esquema da roda da roca de fiar.

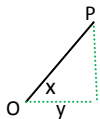
Relativamente ao esquema representado na figura, sabe-se que:

- Os comprimentos são expressos em centímetros;
- P é um ponto fixo da roda que a acompanha no seu movimento de rotação em torno do ponto O;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP;
- as retas r e AO são perpendiculares;
- $\overline{OA} = 30$.



Seja d a função que a cada valor de x faz corresponder a distância do ponto P à reta r .

1.1. Mostra que $d(x) = 53 + 30 \cos x$.



$$\text{Quando } x \text{ é um ângulo agudo, } \cos x = \frac{y}{OP} \Leftrightarrow \cos x = \frac{y}{30} \Leftrightarrow y = 30 \cos x$$

$$d(x) = 23 + r + y \Leftrightarrow d(x) = 23 + 30 + 30 \cos x \Leftrightarrow d(x) = 53 + 30 \cos x$$

Quando x não é um ângulo agudo, por um processo semelhante e com base no círculo trigonométrico, obtemos a mesma expressão.

1.2. Calcula o valor exato de $d\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e interpreta-o no contexto do problema.

$$d\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 53 + 30 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow d\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 53 + 30\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow d\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 53 - 15\sqrt{2}, \text{ representa a distância do ponto P à reta r quando o ângulo é de } \frac{3\pi}{4}$$

1.3. Sem recorrer à calculadora, resolve, em \mathbb{R} , a equação $d(x) = 68$.

$$d(x) = 68 \Leftrightarrow 53 + 30 \cos x = 68 \Leftrightarrow 30 \cos x = 15 \Leftrightarrow \cos x = 0,5 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Determina o valor de $3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ sabendo que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

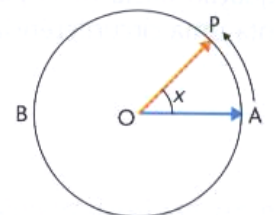
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ e } \alpha \in 2^\circ Q$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4} \quad \text{Assim, } 3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3 - \frac{1}{-\frac{3}{4}} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

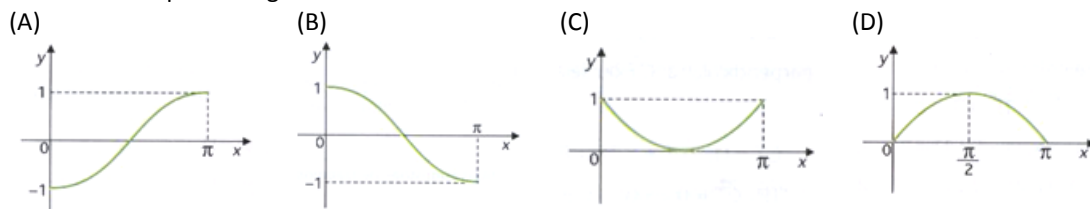
3. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 1. Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência. Considera que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre o arco AB, terminando o seu percurso em B. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.

Seja f a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o produto escalar

$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OP}$. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f ?



Numa pequena composição, explica as razões que te levaram a rejeitar os outros três gráficos, apresentando uma razão por cada gráfico.



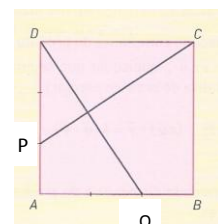
Como $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OP}\| \times \cos(\widehat{OA \hat{ } OP}) = 1 \times 1 \times \cos x$, verifica-se que o gráfico (A) não está correto uma vez que quando o ângulo x é agudo o produto escalar tem de ser positivo, o que não acontece neste gráfico. O gráfico C e o D não estão corretos uma vez que quando o ângulo x é obtuso, o produto escalar tem de ser negativo e nestes dois gráficos não se verifica esta situação. A opção correta é a B.

4. Na figura está representado um quadrado ABCD] de lado 3. Sabe-se que:

- $\vec{AQ} = \frac{2}{3} \vec{AB}$
- $\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AD}$

Mostra que os vetores \vec{DQ} e \vec{PC} são perpendiculares.

Sugestão: Começa por exprimir os vetores \vec{DQ} e \vec{PC} como uma soma de dois vetores.



$$\vec{PC} \cdot \vec{DQ} = (\vec{PD} + \vec{DC}) \cdot (\vec{DA} + \vec{AQ}) = \vec{PD} \cdot \vec{DA} + \vec{PD} \cdot \vec{AQ} + \vec{DC} \cdot \vec{DA} + \vec{DC} \cdot \vec{AQ} = 2 \times 3 \times \cos 180^\circ + 0 + 0 + 2 \times 3 \times \cos 0^\circ = -6 + 6 = 0$$

5. Considera num referencial o.n. xOy , as retas a e b , definidas, respetivamente, por:

$$a: (x, y) = (3, 1) + k(0, 4), \quad k \in \mathbb{R} \quad b: y = \frac{4}{3}x + 2$$

5.1. Determina, em graus, a amplitude do ângulo das duas retas. Apresenta o valor arredondado às unidades.

$$\vec{a}(0, 4) \quad \|\vec{a}\| = 4 \quad \vec{b}(3, 4) \quad \|\vec{b}\| = 5 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \times 3 + 4 \times 4 = 16 \quad \cos(\widehat{r \hat{ } s}) = \frac{16}{4 \times 5} \quad \cos^{-1}\left(\frac{16}{20}\right) \approx 37^\circ$$

o ângulo das duas retas é de 37° .

5.2. Determina uma equação da reta que passa pelo ponto A(1, -2) e é perpendicular à reta b .

Um vetor perpendicular à reta b é $\vec{p}(-4, 3)$

A equação reduzida é $y = -\frac{3}{4}x + b$, substituindo pelo ponto, vem $-2 = -\frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow -2 = -\frac{3}{4} + b \Leftrightarrow$

$$-2 + \frac{3}{4} = b \Leftrightarrow b = -\frac{5}{4} \quad \text{a equação da reta fica } y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

6. Determina uma equação do plano tangente à superfície esférica definida por $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 30$, no ponto T de coordenadas (-1, 0, 2).

$\vec{CT} = T - C = (-1, 0, 2) - (3, -1, 0) = (-4, 1, 2)$, o vetor \vec{CT} é perpendicular ao plano tangente

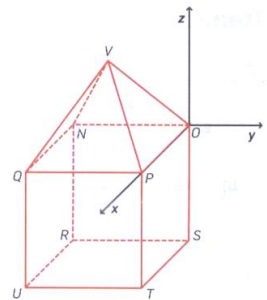
$-4x + y + 2z + d = 0$, substituindo as coordenadas do ponto T, obtemos $-4 \times (-1) + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$

Equação do plano: $-4x + y + 2z - 8 = 0$.

7. Na figura, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQRST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto R tem coordenadas $(0, -4, -4)$
- o plano QTV é definido pela equação $10x + 4y + 4z = 24$



- 7.1. Quais as coordenadas do vetor normal ao plano QTV ? E do ponto V ?

Vetor perpendicular ao plano $\vec{v} = (10, 4, 4)$; $V(2, -2, z)$

Substituindo as coordenadas de V na equação do plano QTV obtemos a coordenada z que falta no vértice V

$$10 \times 2 + 4 \times (-2) + 4z = 24 \Leftrightarrow z = 3 \quad V(2, -2, 3)$$

- 7.2. Quais as coordenadas dos pontos em que o plano QTV intersecta os eixos do referencial?

Interseção com eixo Ox : $(x, 0, 0) \quad 10x + 0y + 0z = 24 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}$, ponto de coordenadas $(\frac{12}{5}, 0, 0)$

Interseção com eixo Oy : $(0, y, 0) \quad 0x + 4y + 0z = 24 \Leftrightarrow y = 6$, ponto de coordenadas $(0, 6, 0)$

Interseção com eixo Oz : $(0, 0, z) \quad 0x + 0y + 4z = 24 \Leftrightarrow z = 6$, ponto de coordenadas $(0, 0, 6)$

- 7.3. Escreve a equação cartesiana do plano perpendicular ao vetor \overrightarrow{QS} e que passa no ponto V .

$$\overrightarrow{QS} = S - Q = (0, 0, -4) - (4, -4, 0) = (-4, 4, -4) \quad \text{equação do plano: } -4x + 4y - 4z + d = 0,$$

substituindo as coordenadas do ponto do plano, obtemos $-4 \times 2 + 4 \times (-2) - 4 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 28$,

a equação do plano fica $-4x + 4y - 4z + 28 = 0$

- 7.4. Considere um ponto B , com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto R . Sabe-se que

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OU} = 4. \text{ Determina a cota do ponto } B.$$

$$B(0, -4, z) \quad \overrightarrow{OB} = (0, -4, z) \quad \overrightarrow{OU} = (4, -4, -4) \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OU} = 4 \Leftrightarrow 16 - 4z = 4 \Leftrightarrow z = 3 \quad B(0, -4, 3)$$