TESTE INTERMÉDIO - 11.º ANO - MATEMÁTICA B

19 de Maio de 2006

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

1.1. A Anabela, ao acrescentar aos 3 litros de sumo, x litros de água, obteve $3+x$ litros de bebida.
Atendendo a que o sumo de laranja puro já contém 92% de água, 1 litro de sumo contém 0,92 litros de água. Portanto, 3 litros de sumo contêm $0{,}92 \times 3$ litros de água.
A bebida, assim preparada, contém $0{,}92 \times 3 + x$ litros de água.
A percentagem de água existente na bebida obtida será então dada pela expressão

$$\frac{0{,}92 \times 3 + x}{3+x} \times 100 = \frac{100\,x + 276}{x+3}$$

1.2. Para que a bebida preparada pela Anabela não tenha mais de 97% de água, o número x de litros de água a acrescentar aos três de litros de sumo deve obedecer à seguinte condição: $\frac{100\,x+276}{x+3} \leq 97$

Dado que $x+3>0$, $\frac{100\,x+276}{x+3} \leq 97 \Leftrightarrow 100\,x + 276 \leq 97\,x + 291$

Tem-se agora que $100\,x + 276 \leq 97\,x + 291 \Leftrightarrow 3x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq 5$

Podemos assim concluir que a quantidade máxima de água que a Anabela pode acrescentar ao sumo de laranja puro, de tal modo que a sua bebida não tenha mais de 97% de água, é 5 litros.

2.1. Às zero horas, a diferença entre as distâncias das extremidades dos ponteiros à barra é igual à diferença de comprimento entre eles. Assim, o valor pedido é igual a $m(0) - h(0)$.

$$m(0) - h(0) = \left[1 + \frac{7}{10}\,cos\left(\frac{\pi}{1800} \times 0\right)\right] - \left[1 + \frac{5}{10}\,cos\left(\frac{\pi}{21\,600} \times 0\right)\right] =$$

$$= \left[1 + \frac{7}{10}\,cos(0)\right] - \left[1 + \frac{5}{10}\,cos(0)\right] = \left(1 + \frac{7}{10}\right) - \left(1 + \frac{5}{10}\right) =$$

$$= \frac{2}{10} = 0{,}2$$

O ponteiro dos minutos tem mais $0{,}2\,m$, ou seja, mais $20\,cm$ do que o ponteiro das horas.

2.2. A função m tem período 3600 se $m(t+3600)=m(t)$.

$$m(t+3600)=1+\frac{7}{10}\,cos\left[\frac{\pi}{1800}\,(t+3600)\right]=$$

$$=1+\frac{7}{10}\,cos\left(\frac{\pi}{1800}\,t+\frac{3600\,\pi}{1800}\right)=$$

$$=1+\frac{7}{10}\,cos\left(\frac{\pi}{1800}\,t+2\pi\right)=$$

$$=1+\frac{7}{10}\,cos\left(\frac{\pi}{1800}\,t\right)=$$

$$=m(t)$$

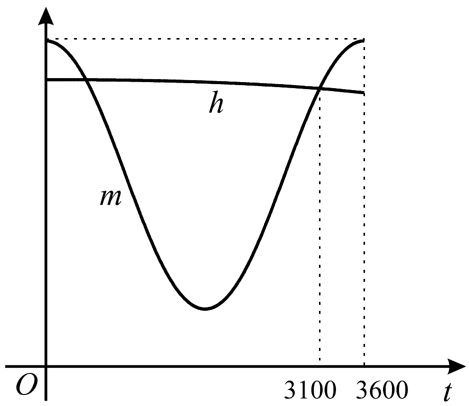
Interpretação: dado que 3600 segundos é 1 hora, pode afirmar-se que, de hora a hora, se repete a distância da extremidade do ponteiro dos minutos à barra. De facto, de hora a hora, a posição do ponteiro dos minutos é a mesma.

2.3.

A recta AB é paralela à barra quando a distância da extremidade do ponteiro dos minutos à barrra é igual à distância da extremidade do ponteiro das horas à barra.

Os instantes em que, na primeira hora do dia, essa distância é igual são as soluções da equação $m(t)=h(t)$, no intervalo $[\,0\,,3\,600]$.

Com o objectivo de resolver graficamente esta equação, obteve-se, na calculadora, o gráfico da função m e o gráfico da função h, no intervalo $[\,0\,,3\,600]$.



Da observação do gráfico, podemos concluir que, na primeira hora do dia, há dois instantes em que a recta AB é paralela à recta r. O instante pedido ocorre 3100 segundos depois das zero horas, ou seja, às 0h 51m 40s.

3. Tem-se, sucessivamente:

Área do quadrado sombreado: x^2

Diâmetro do círculo: $1-x$

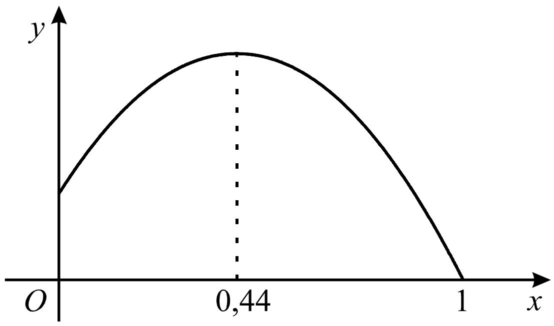
Raio do círculo: $\frac{1-x}{2}$

Área do círculo: $\pi\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$

Área da regiâo sombreada: $x^2+\pi\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$

Área da regiâo branca: $1-\left[x^2+\pi\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\right]$

Com o objectivo de encontrar o valor de x para o qual a área da região branca é máxima, obteve-se na calculadora o gráfico da função de domínio $]0,1[$ definida por $1-\left[x^2+\pi\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\right]$



Concluímos que o valor de x para o qual a área da região branca é máxima é $0,44$.