

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

17 de Março de 2006

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 3

---

### Grupo I

1.  $\lim y_n = \lim \left[ 2 + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 2 + \lim \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$

Tendo em conta a continuidade da função logarítmica, tem-se que

$$\lim \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = \ln \left[ \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$$

Prosseguindo, tem-se:  $2 + \ln \left[ \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 2 + \ln e = 2 + 1 = 3$

Resposta **B**

2. Tem-se sucessivamente:

$$e^{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \Leftrightarrow e^{x-1} = e^{-1/3} \Leftrightarrow x-1 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Resposta **A**

3. Tem-se sucessivamente:

$$\log_3(2-x) \leq 1 \Leftrightarrow 2-x \leq 3 \wedge 2-x > 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2[$$

Resposta **B**

4. A partir dos dados do enunciado, podemos concluir que

- a ordenada de  $A$  é 1, logo a ordenada de  $C$  é 2 e, portanto, a abcissa de  $E$  é  $e^2$
- a abcissa de  $B$  é 1, logo a abcissa de  $D$  é também 1 e, portanto, a ordenada de  $D$  é  $e$

Assim, no triângulo  $[BDE]$ , a base  $[BD]$  mede  $e$  e a altura correspondente mede  $e^2 - 1$

Portanto, a área do triângulo  $[BDE]$  é  $\frac{e(e^2-1)}{2}$

Resposta **C**

5. Designando por  $A$  o acontecimento «o aluno pratica andebol» e por  $B$  o acontecimento «o aluno pratica basquetebol», tem-se:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Por outro lado, tem-se sempre que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como todos os alunos da turma praticam pelo menos um dos dois desportos, tem-se  $P(A \cup B) = 1$

Donde,  $1 = 0,5 + 0,8 - P(A \cap B)$

Portanto,  $P(A \cap B) = 0,3$

Tem-se, então,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

Resposta **A**

6. Em cada lançamento, a probabilidade de sair 1 é  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Em cada lançamento, a probabilidade de sair 2 é  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Dado que os acontecimentos em causa são independentes, vem:

|              |                                  |                                                                   |                                  |
|--------------|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $x_i$        | 2 (1 + 1)                        | 3 (2 + 1 ou 1 + 2)                                                | 4 (2 + 2)                        |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ |

ou seja,

|              |               |               |               |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$        | 2             | 3             | 4             |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

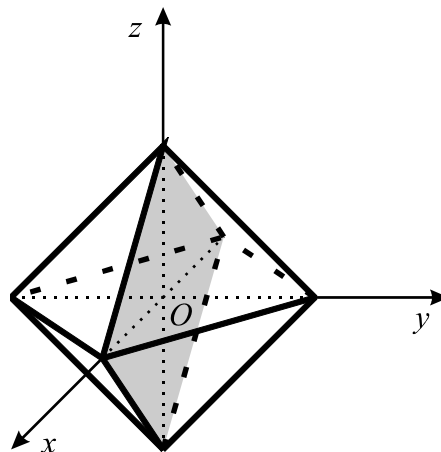
Portanto,  $k = 4$

Resposta **D**

7. Tem-se que:  
 Número de casos possíveis:  ${}^6C_2$   
 (número de maneiras de escolher dois dos seis vértices do octaedro).  
 Número de casos favoráveis:  ${}^4C_2$   
 (número de maneiras de escolher dois dos quatro vértices do octaedro que pertencem ao plano  $xOz$ ).

Probabilidade pedida:

$$\frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$



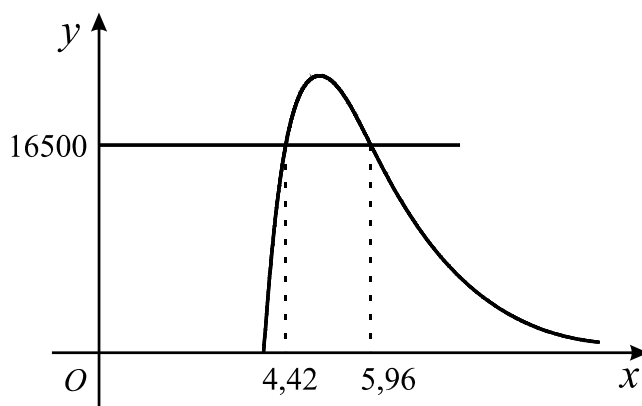
Resposta **D**

## Grupo II

- 1.1. O lucro que a empresa tem em cada litro de azeite que vende é  $x - 4$  (diferença entre o preço de venda ao público e a despesa que acarreta um litro de azeite).  
 Assim, o lucro mensal  $L$  (em euros), resultante da venda do azeite, é igual ao produto do lucro que auferem em cada litro de azeite pelo número de litros de azeite vendidos num mês.

Assim,  $L(x) = (x - 4)V(x)$ , e portanto,  $L(x) = (x - 4)e^{15-x}$

- 1.2. Com o objectivo de resolver graficamente a inequação  $L(x) > 16500$ , obteve-se, na calculadora, o gráfico da função  $L$  e a recta de equação  $y = 16500$



Da observação do gráfico, podemos concluir que o preço do litro de azeite deve variar entre 4,42 € e 5,96 €

$$2.1. \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2 - \ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = \frac{2 + \ln 3}{\frac{1}{3}} = 6 + 3 \ln 3 = \ln(e^6) + \ln 3^3 = \ln(27e^6)$$

2.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \ln x}{x} = \frac{2 - (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a recta de equação  $x = 0$  é assíntota (vertical) do gráfico de  $f$ .

Como a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^+$ , não existem mais assíntotas verticais.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a recta de equação  $y = 0$  é assíntota (horizontal) do gráfico de  $f$ .

3. Relativamente à função  $a$  tem-se  $a(0) = 26$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 21$ , o que não está de acordo com a conclusão, que se tira do enunciado, de que são iguais a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, e o valor para o qual a temperatura tende, com o passar do tempo. Concluímos, portanto, que a função  $a$  não é adequada à situação descrita.

Na função  $b$  tem-se  $b(5) = 64$  e  $\lim_{t \rightarrow 5^+} b(t) = 74$ , o que traduz um acréscimo instantâneo de temperatura, no momento em que o lume é apagado. Esta situação não faz qualquer sentido no contexto da experiência, o que nos permite afirmar que a função  $b$  também não é adequada à situação descrita.

A função  $c$  também não é adequada à situação descrita, pois:

- é decrescente no intervalo  $[0, 5]$ , o que contradiz o facto de a temperatura da água ter aumentado ao longo dos primeiros cinco minutos;
- é crescente no intervalo  $[5, +\infty[$ , o que contradiz o facto de a temperatura da água ter diminuído a partir do instante em que se apagou o lume.

(Observação: como é evidente, bastaria apresentar um dos dois argumentos anteriores)

A função correcta é, portanto, a  $d$ .

4. Dado que a recta de equação  $y = x + 3$  é assíntota do gráfico de  $g$ , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = 3$$

Tem-se, sucessivamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} = 1$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{g(x)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x g(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x (x - g(x))}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x - g(x)) \times \frac{x}{g(x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( - (g(x) - x) \times \frac{x}{g(x)} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = -3 \times 1 = -3 \end{aligned}$$

Portanto, a recta de equação  $y = x - 3$  é assíntota do gráfico de  $h$ .