

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

(Dec.-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, para alunos que se matricularam no 10.º Ano em 2003-2004)

Duração da Prova: **90 minutos**

17/Março/2006

VERSÃO 4

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui quatro itens de resposta aberta,
alguns subdivididos em alíneas, num total de seis.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

- (A) $\frac{7}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

2. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_3(1-x) \leq 1$$

- (A) $[-1, 2[$ (B) $[-2, 1[$
(C) $[-2, +\infty[$ (D) $] -\infty, -2]$

3. Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Seja (y_n) a sucessão de termo geral $y_n = 1 + \ln(x_n)$ ($\ln$ designa logaritmo de base e)

Qual é o valor de $\lim y_n$?

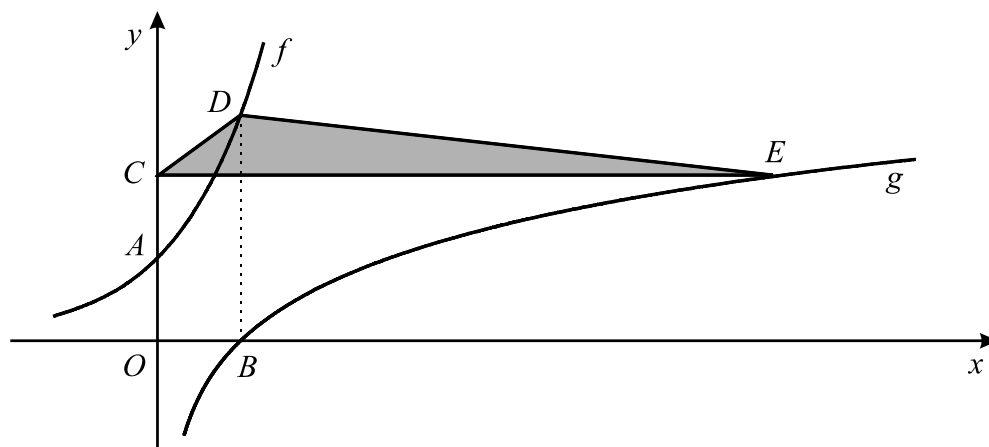
- (A) 2 (B) 3 (C) $1 + e$ (D) $2 + e$

4.

Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n. xOy :

- parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln x$
($\ln$ designa logaritmo de base e)

O ponto A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico de g com o eixo Ox .



Na figura está também representado um triângulo $[CDE]$.

O ponto C pertence ao eixo Oy , o ponto D pertence ao gráfico de f e o ponto E pertence ao gráfico de g .

Sabe-se ainda que:

- a recta BD é paralela ao eixo Oy e a recta CE é paralela ao eixo Ox
- $\overline{AC} = \overline{OA}$

Qual é a área do triângulo $[CDE]$?

(A) $\frac{(e-1) \ln 2}{2}$

(B) $\frac{(e^2-1) \ln 2}{2}$

(C) $\frac{e(e-2)}{2}$

(D) $\frac{e^2(e-2)}{2}$

5.

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular em que cada um dos seus vértices pertence a um dos eixos coordenados (dois vértices em cada eixo).

Escolhendo, ao acaso, três vértices desse octaedro, qual é a probabilidade de eles definirem um plano perpendicular ao eixo Oy ?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{2}{5}$

6. Todos os alunos de uma turma de uma escola secundária praticam pelo menos um dos dois desportos seguintes: andebol e basquetebol.

Sabe-se que:

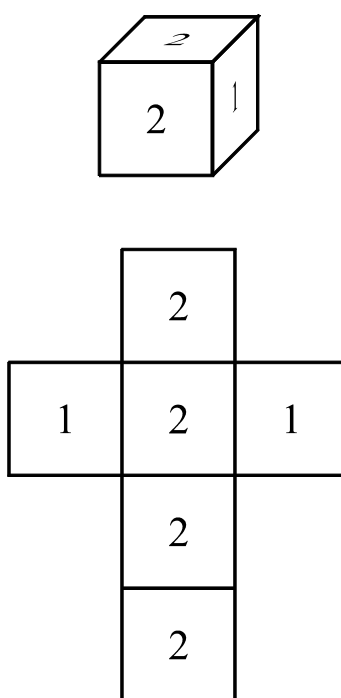
- metade dos alunos da turma pratica andebol
- 70% dos alunos da turma pratica basquetebol

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e constata-se que ele é praticante de andebol.

Qual é a probabilidade de ele praticar basquetebol?

- (A) 0,4 (B) 0,3 (C) 0,2 (D) 0,1

7. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.



Lança-se este dado duas vezes.

Seja X a variável aleatória: soma dos números saídos nos dois lançamentos.

Indique o valor de k tal que $P(X = k) = \frac{1}{9}$

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

1.1. Mostre que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(4e^2\right)$

- 1.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

2. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função

$$V(x) = e^{14-x} \quad (x > 0)$$

sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).

- 2.1. A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite. Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por

$$L(x) = (x - 3)e^{14-x}$$

- 2.2. Utilize a calculadora para resolver **graficamente** o seguinte problema:
Entre que valores deve variar o preço de venda ao público de um litro de azeite para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros? Apresente os valores em euros, arredondados aos centimos (de euro).
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

3. Com o objectivo de estudar as leis do aquecimento e do arrefecimento, realizou-se, num laboratório de Física, a seguinte experiência: aqueceu-se ao lume uma certa quantidade de água, durante cinco minutos; passado este tempo, apagou-se o lume e deixou-se a água a arrefecer. A temperatura da água foi sendo medida, ao longo do decorrer da experiência.

Admita que:

- neste laboratório, a temperatura ambiente é constante;
- a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, era igual à temperatura ambiente;
- depois de se ter apagado o lume, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, a igualar a temperatura ambiente.

Em resultado da experiência, concluiu-se que a relação entre a temperatura da água e o tempo t , contado em minutos, a partir do instante em que se colocou a água ao lume, é modelada por uma, e uma só, das quatro funções, a , b , c e d , definidas a seguir:

$$a(t) = \begin{cases} 24 - 2t & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 - 10e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} 12(t + 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 70e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 14(t + 1) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$d(t) = \begin{cases} 12(t + 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

Qual das quatro funções é a correcta?

Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhuma das outras três, indicando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

4. De uma função g , de domínio $]0, +\infty[$, sabe-se que:

- não tem zeros;
- a recta de equação $y = x + 2$ é assíntota do seu gráfico.

Seja h a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $h(x) = \frac{x^2}{g(x)}$

Prove que a recta de equação $y = x - 2$ é assíntota do gráfico de h .

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II 137

1. 46

1.1.23

1.2.23

2. 43

2.1.20

2.2.23

3. 23

4. 25

TOTAL 200