gabinete de avaliação educacional

Ministério da Educação

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos**

15/Março/2007

VERSÃO 4

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui quatro itens de resposta aberta, alguns subdivididos em alíneas, num total de seis.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r *– raio da base*; g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r *– raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r *– raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' .\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' .\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' .\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' .\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' .\, e^u$

$(a^u)' = u' .\, a^u .\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{1}{e^x} < e$

(A) $]-\infty, -1[$ **(B)** $]-\infty, 1[$

(C) $]-1, +\infty[$ **(D)** $]1, +\infty[$

2. Seja a um número real maior do que $1.$
Indique o valor de $\log_a \left(a \times \sqrt[4]{a} \right)$

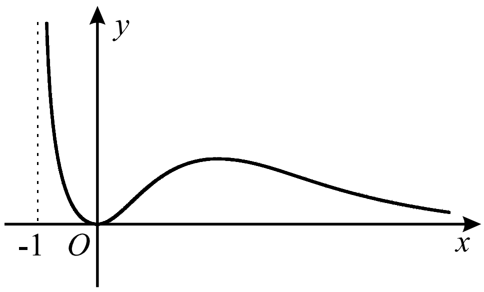
(A) $\frac{5}{4}$ **(B)** $\frac{4}{3}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

3. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$
Sabe-se que a recta de equação $y = 5x + 1$ é assimptota do gráfico de g
Indique o valor de

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{g(x)}{x} \times \left(g(x) - 5x \right) \right]$$

(A) 0 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** $+\infty$

4. Na figura está representada, em referencial xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-1, +\infty[$, contínua em todo o seu domínio.

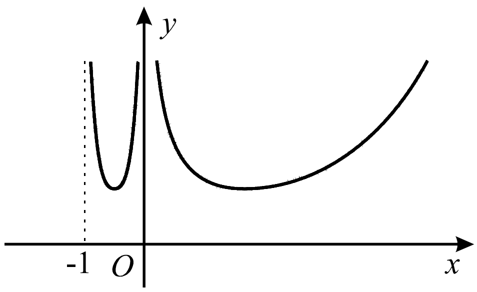


Tal como a figura sugere, tem-se:

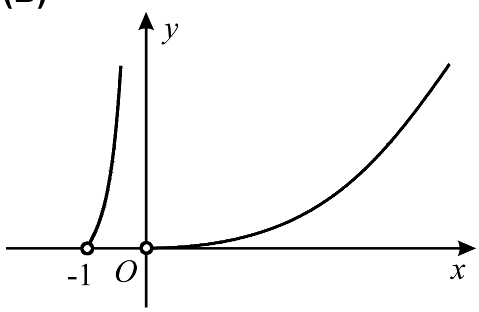
- o gráfico de f contém a origem do referencial;
- as rectas de equações $y = 0$ e $x = -1$ são assimptotas do gráfico de f.

Em qual das opções seguintes poderá estar representada, em referencial xOy, parte do gráfico de $\frac{1}{f}$?

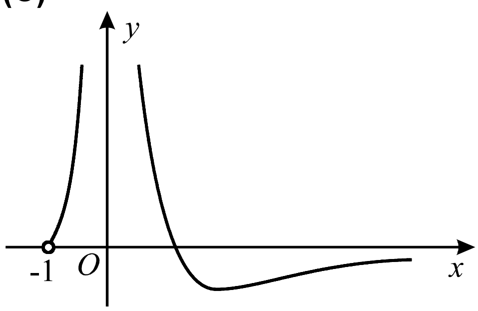
(A)



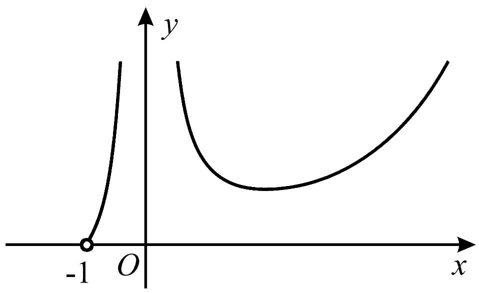
(B)



(C)



(D)



5. Um saco contém vinte bolas, numeradas de 1 a 20.

Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números.

Qual é a probabilidade de o maior desses três números ser 9 ?

(A) $\frac{24}{{}^{20}C_3}$ **(B)** $\frac{28}{{}^{20}C_3}$ **(C)** $\frac{32}{{}^{20}C_3}$ **(D)** $\frac{36}{{}^{20}C_3}$

6. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$, ambos com probabilidade não nula.

Sabe-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $P(B)$ **(D)** $\frac{P(B)}{P(A)}$

7. O Jorge tem seis moedas no bolso.
Ele retira, simultaneamente e ao acaso, duas dessas seis moedas.
Seja X a quantia, em cêntimos, correspondente às duas moedas retiradas.
Sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	20	30	40	60	70
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^6C_2}$	$\frac{6}{{}^6C_2}$	$\frac{3}{{}^6C_2}$	$\frac{2}{{}^6C_2}$	$\frac{3}{{}^6C_2}$

Quais poderiam ser as seis moedas que o Jorge tinha inicialmente no bolso?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - x} & se \;\; x < 0 \\ 3 & se \;\; x = 0 \\ \dfrac{4x^2 - x \ln(x+1)}{x^2} & se \;\; x > 0 \end{cases}$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, averigúe se a função f é contínua em $x = 0$. Justifique a sua resposta.

2. A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu pH, que é dado por

$$pH = -\log_{10}(x)$$

onde x designa a concentração de iões H_3O^+, medida em mol/dm^3.
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1. Admita que o pH da saliva é $6{,}7$.
Qual é a concentração (em mol/dm^3) de iões H_3O^+, na saliva?
Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e a entre 1 e 10. Apresente o valor de a arredondado às unidades.

2.2. A concentração de iões H_3O^+ no sumo de limão é quádrupla da concentração de iões H_3O^+ no vinagre.
Qual é a diferença entre o pH do vinagre e o pH do sumo de limão? Apresente o resultado arredondado às décimas.
Sugestão: comece por designar por v a concentração de iões H_3O^+ no $vinagre$ e por exprimir, em função de v, a concentração de iões H_3O^+ no sumo de limão.

3. Considere, num referencial o. n. xOy,

- a curva C, que representa graficamente a função f, **de domínio** $[0, 1]$, definida por $f(x) = e^x + 4x$
- a recta r, de equação $y = 6$

3.1. **Sem recorrer à calculadora**, justifique que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

3.2. **Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, visualize a curva C e a recta r, na janela $[0, 1] \times [0, 7]$ (janela em que $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 7]$).

Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva C e a recta r, visualizados na calculadora.

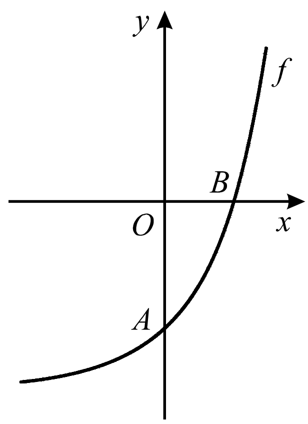
Assinale ainda os pontos O, P e Q, em que:

- O é a origem do referencial;
- P é o ponto de coordenadas $(0\ ,\ e)$;
- Q é o ponto de intersecção da curva C com a recta r; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora.

Desenhe o triângulo $[OPQ]$ e **determine a sua área**. Apresente o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Seja k um número real maior do que 1.

Na figura está representada uma parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - k$.



Tal como a figura sugere

- A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy
- B é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox

Mostre que:
Se o declive da recta AB é $k - 1$, então $k = e$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 24

2. 42
2.1. 20
2.2. 22

3. 47
3.1. 23
3.2. 24

4. 24

TOTAL **200**