EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10.º/11.º ou 11.º/12º Anos de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

Identifique claramente os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (página 12).

Em todos os itens da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

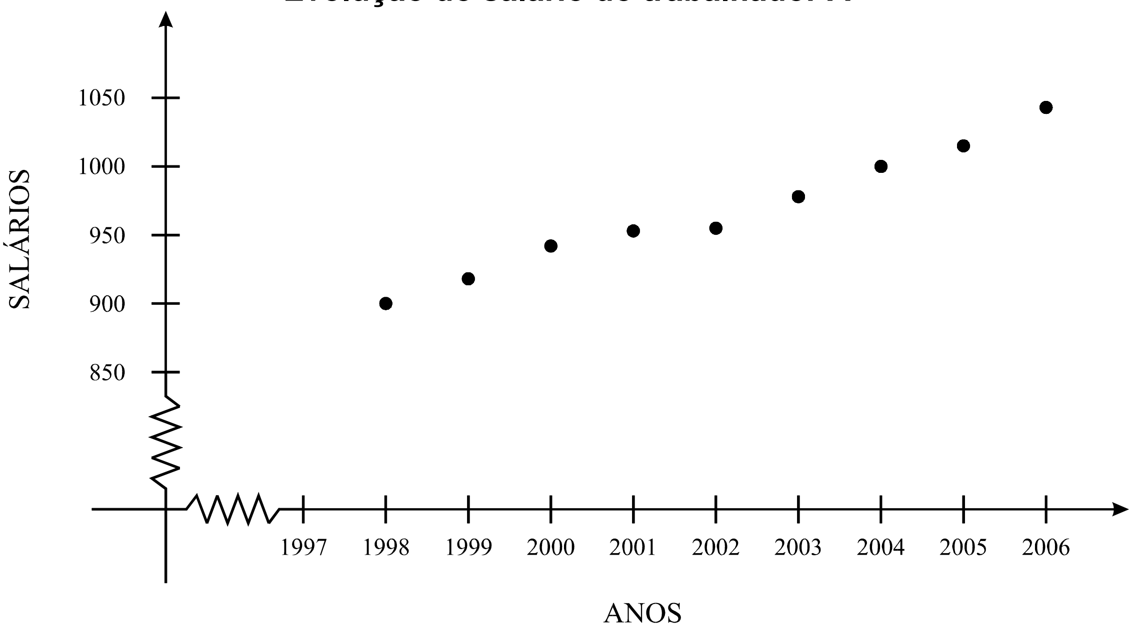
1. A evolução da massa salarial de um conjunto de trabalhadores é, por vezes, explicável através de modelos matemáticos.

Numa dada empresa, fez-se um estudo comparativo da evolução dos vencimentos (em euros) de dois trabalhadores, **A** e **B**, entre 1998 e 2006.

- Relativamente ao trabalhador **A**, o valor do vencimento mensal em cada ano, no período compreendido entre 1998 e 2006, é apresentado na tabela seguinte e reproduzido num diagrama de dispersão.

Anos	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Salário	900	918	942	953	955	978	1000	1015	1043

Evolução do salário do trabalhador A



- Relativamente ao trabalhador **B**, sabe-se que, em 1998, recebia mensalmente 652 euros e que, nos anos seguintes, referentes ao período em estudo, o valor do seu vencimento mensal pode ser obtido através do modelo

$$v_n = 652 \times 1{,}0502^{n-1}$$

Nota: a variável n está associada aos anos relativos ao período em estudo, concretamente, $n = 1$ corresponde a 1998, $n = 2$ corresponde a 1999, etc.

1.1. **Utilizando a sua calculadora**, indique um valor aproximado do coeficiente de correlação linear entre as variáveis descritas na tabela (anos/salário) referente ao trabalhador **A**. Apresente o resultado com duas casas decimais.

Interprete esse valor, tendo em conta o diagrama de dispersão correspondente.

1.2. Tome em atenção que o modelo que traduz a evolução do salário do trabalhador **B** é uma progressão geométrica.

1.2.1. Indique o primeiro termo e a razão da progressão geométrica em questão.

1.2.2. Um trabalhador aufere, por ano, 12 ordenados mensais mais o subsídio de férias e o décimo terceiro mês, ambos com valor igual ao do ordenado mensal.

Utilizando a fórmula apropriada (que faz parte do formulário), calcule, aproximadamente, o valor da totalidade dos vencimentos auferidos pelo trabalhador **B** entre 1998 e 2006, inclusive.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. O campo de futebol de um dado clube tem uma bancada destinada a não sócios, que leva $4\,000$ espectadores. Se o preço de cada bilhete for 10 euros, prevê-se que a lotação dessa bancada fique esgotada.

Com base em experiências anteriores, verifica-se que, se o preço de cada bilhete for aumentado numa certa percentagem, x, sobre o valor base (10 euros), o número de espectadores baixa metade dessa percentagem. Por exemplo, se o preço dos bilhetes aumentar 10% , $x = 0{,}1$, o número de espectadores sofre um decréscimo de 5%.

Admitindo a exactidão do modelo descrito e considerando sempre o aumento percentual, x, sobre o preço base (10 euros), responda às questões que se seguem.

2.1. Mostre que, se x for o aumento percentual do preço de cada bilhete para aquela bancada, num dado jogo, então a receita de bilheteira, R, é dada por:

$$R(x) = -20\,000\,x^2 + 20\,000\,x + 40\,000 \text{ , com } 0 \leq x \leq 2$$

Tenha em atenção que:

- *o preço de cada bilhete, p, em função do aumento percentual, x, é dado por* $p(x) = 10\,(1 + x)$
- *o número de espectadores, n, em função do aumento percentual, x, é dado por* $n(x) = 4\,000 - 2\,000\,x$

2.2. Um dos elementos da direcção do clube sugere que o preço de cada bilhete seja de 20 euros, para serem maximizadas as receitas de bilheteira. Porém, um segundo elemento da direcção opõe-se, dizendo que o ideal é manter o preço de cada bilhete a 10 euros, uma vez que as receitas de bilheteira são superiores se assim for.

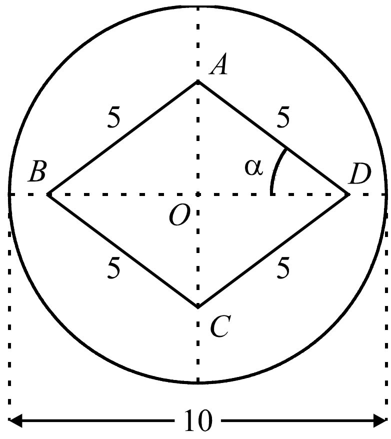
Num pequeno texto, comente o argumento de cada um dos elementos da direcção do clube, tendo em conta o objectivo de maximizar as receitas de bilheteira.

Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta:

- o valor da percentagem, x, que a direcção do clube deve aplicar sobre o preço base (10 euros), para que se maximizem as receitas de bilheteira, e o respectivo valor da receita (no caso de discordar da opinião de cada um dos elementos da direcção);
- um argumento, fundamentado, referente às propostas de cada um dos elementos da direcção, dizendo se concorda, ou não, com elas;
- todos os elementos recolhidos na utilização da sua calculadora gráfica que se tenham mostrado relevantes.

2.3. À entrada para o recinto do jogo, cada espectador, sócio ou não sócio, recebeu um cartão numerado para se habilitar a um sorteio. Estavam presentes 6825 espectadores, dos quais 40% eram não sócios. Foram sorteados, simultaneamente, dois números. Qual a probabilidade de ambos os contemplados serem sócios?
Apresente o resultado final com aproximação às centésimas.

3. Numa determinada localidade, o responsável pelo planeamento urbanístico apresentou uma proposta para a construção de uma rotunda com 10 metros de diâmetro. No centro da rotunda, pretende-se construir um jardim em forma de losango, com 20 metros de perímetro, como sugere a figura. À volta do jardim, serão colocados calçada e outros elementos decorativos.



Relativamente à figura, considere que:

- os pontos A, B, C e D são os vértices do losango;
- o ponto O é o centro da circunferência;
- o ângulo ADO tem de amplitude α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3.1. Mostre que a área, em m^2, da zona destinada ao jardim é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha) = 50\, cos\, \alpha \,.\, sen\, \alpha \ , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

3.2. Determine $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Interprete geometricamente o resultado obtido, indicando qual a forma particular do losango, para $\alpha = \frac{\pi}{4}$

4. No período de testes que antecedeu a entrada em funcionamento de um gasómetro, com capacidade de 100 toneladas, procedeu-se ao seu enchimento, continuamente, durante 24 horas.

Por razões de segurança, o gasómetro foi lastrado com $2{,}5$ toneladas de gás, após o que se iniciou a operação de enchimento. A partir daí, o seu enchimento foi feito de acordo com o modelo:

$$M(t) = \frac{100}{1+39\,e^{-0{,}49t}}\text{, sendo } 0 \leq t \leq 24$$

(M representa a massa total, expressa em toneladas, existente no gasómetro t horas desde o início do seu enchimento.)

Nota: Na resolução das questões seguintes, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

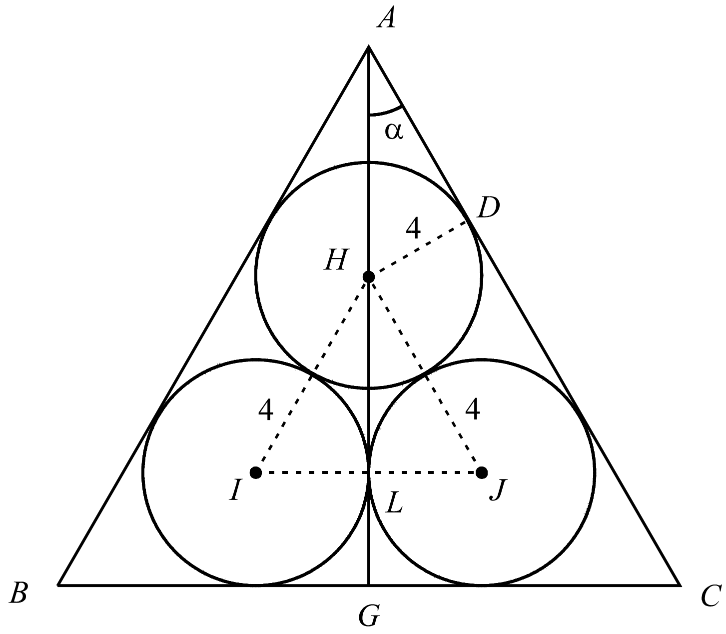
4.1. Qual era a massa total, aproximada, existente no gasómetro 3 horas após o início do seu enchimento?

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

4.2. Durante o período em que decorre o enchimento do gasómetro, fará sentido afirmar que existe um dado intervalo de tempo em que a taxa de variação média do modelo assume um valor negativo?

Justifique devidamente a sua resposta.

5. Para vedar três canteiros circulares, com 4 metros de raio cada, um agricultor decidiu colocar uma rede em forma de triângulo equilátero, $[ABC]$, como a figura sugere.



Relativamente à figura, considere que:

- as circunferências são tangentes entre si;
- os lados do triângulo são tangentes às circunferências;
- os pontos H, I e J são os centros das circunferências;
- G é o ponto médio de $[BC]$;
- D é ponto do lado $[AC]$ tangente à circunferência de centro H;
- L é ponto de tangência das circunferências de centros I e J, respectivamente;
- α é a amplitude do ângulo DAH.

Quantos metros da rede mencionada necessita, aproximadamente, o agricultor para vedar os três canteiros?

Apresente o resultado final arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

Sugere-se que:

- *determine a altura do triângulo* $[HIJ]$*;*
- *determine a altura do triângulo* $[ABC]$*;*
- *determine o lado do triângulo* $[ABC]$.

FIM

COTAÇÕES

1. .... 32 pontos

1.1 ....12 pontos

1.2. ....20 pontos

1.2.1. .... 8 pontos

1.2.2. .... 12 pontos

2. .... 60 pontos

2.1. ....16 pontos

2.2. ....24 pontos

2.3. ....20 pontos

3. .... 44 pontos

3.1. .... 22 pontos

3.2. ....22 pontos

4. .... 40 pontos

4.1. .... 18 pontos

4.2. ....22 pontos

5. .... 24 pontos

TOTAL .... 200 pontos

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;} \quad r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude,}$ $\textit{em radianos, do ângulo ao centro;} \quad r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - \textit{raio})$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10.º/11.º ou 11.º/12.º Anos de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**
2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

COTAÇÕES

1. .... **32 pontos**

- **1.1** .... 12 pontos
- **1.2.** .... 20 pontos
  - **1.2.1.** .... 8 pontos
  - **1.2.2.** .... 12 pontos

2. .... **60 pontos**

- **2.1.** .... 16 pontos
- **2.2.** .... 24 pontos
- **2.3.** .... 20 pontos

3. .... **44 pontos**

- **3.1.** .... 22 pontos
- **3.2.** .... 22 pontos

4. .... **40 pontos**

- **4.1.** .... 18 pontos
- **4.2.** .... 22 pontos

5. .... **24 pontos**

TOTAL .... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando responder ao mesmo item mais do que uma vez, deve eliminar inequivocamente a(s) resposta(s) que não deve(m) ser classificada(s). No caso de tal não acontecer, será classificada a resposta que surge em primeiro lugar.

3. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a classificação deve ser:

- a soma algébrica das classificações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a classificação a atribuir é de zero pontos;
- de zero pontos se o examinando se limitar a apresentar o resultado final.

4. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos ou competências não contemplados no Programa da disciplina.

5. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

5.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

5.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação de cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a classificação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou com a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

5.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma classificação diferente das indicadas.

5.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva classificação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

5.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a classificação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a classificação máxima a atribuir em cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

5.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

6. Nas etapas em que está previsto o recurso à calculadora, os critérios específicos subdividem-se em: «Explicação do método utilizado» e «Apresentação do(s) valor(es)».

6.1. Explicação do método utilizado:
De acordo com as instruções gerais para a realização da prova, o examinando deve apresentar todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora. Esta apresentação deve ser classificada de acordo com os níveis de desempenho que se seguem. Em cada nível de desempenho, a classificação máxima prevista é a indicada em percentagem.
Esta percentagem deve ser aplicada sobre a cotação prevista para a explicação do método utilizado, e o valor obtido deve ser arredondado às unidades (por excesso, se a mantissa do número a arredondar for 0,5 ou superior).

Apresentação correcta e completa de todos os elementos relevantes....................100%

Apresentação correcta, mas com ausência de alguns elementos relevantes
ou
Apresentação completa, mas com algumas incorrecções (por exemplo, não respeitar o domínio de uma função) 70%

Apresentação incompleta e com algumas incorrecções 40%

Ausência de explicação ou simples referências do tipo «Vi na calculadora»............ 0%

6.2. Apresentação do(s) valor(es):
Para cada valor que o examinando deve apresentar, os critérios específicos podem indicar um intervalo admissível. O valor apresentado pelo examinando pode pertencer, ou não, a esse intervalo.

- Se o valor pertencer ao intervalo, deve ser atribuída a cotação máxima prevista para essa apresentação, a menos que haja lugar a qualquer desvalorização prevista nos critérios específicos, por desrespeito do número de casas decimais com que o resultado deve ser apresentado.
- Se o valor não pertencer ao intervalo, deve ser atribuída a classificação de zero pontos.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos zero pontos na etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a resposta não deve ser desvalorizada se não indicar a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não deve existir qualquer desvalorização).

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a classificação de zero pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente classificadas com zero pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser classificadas com zero pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a sua resposta deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas classificadas com zero pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na classificação total da resposta, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

    Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado.. -1 ponto

    Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução.. -1 ponto

    Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução .... -2 pontos

12. As classificações a atribuir às respostas dos examinandos devem ser expressas, obrigatoriamente, em números inteiros.

Critérios específicos de classificação

1.1. .... **12**

Indicar o valor do coeficiente de correlação linear $(r \approx 0{,}99)$
(ver nota).. 5

Justificar a adequabilidade do modelo 7

Nota:
Como a tabela é apresentada no enunciado, não se exige que o examinando transcreva para a folha de prova as listas que introduziu na sua calculadora.

Se o examinando não respeitar o número de casas decimais, a classificação da etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

Se o examinando apresentar o valor $0{,}98$, a classificação a atribuir nesta etapa deve ser de 4 pontos.

1.2.1. .... **8**

Indicar o primeiro termo (652) 4

Indicar a razão $(1{,}0502)$.. 4

1.2.2. .... **12**

Utilização correcta da fórmula $\left(652 \times \frac{1-1{,}0502^{9}}{1-1{,}0502} \approx 7195{,}24\right)$ **(ver nota 1)**.. 9

$7195{,}24 \times 14 \approx 100733$ **(ver nota 2)**.. 3

Notas:

1. Todos os resultados coerentes com uma resolução que respeite a indicação, dada no enunciado, relativa ao número de casas decimais a conservar nos cálculos intermédios, devem ser classificados com a cotação total da etapa.

2. Se o examinando multiplicar por 12 o valor referente à soma dos termos da progressão geométrica, a classificação da etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1. .... **16**

Escrever a igualdade $R(x) = (4000 - 2000x)(10 + 10x)$..........................12

Obter a igualdade $R(x) = -20000x^2 + 20000x + 40000$ 4

2.2. .... **24**

A composição deverá conter os seguintes tópicos:

- identificação do máximo e do maximizante da função **(ver nota)**;
- comentário à proposta do primeiro elemento da direcção;
- comentário à proposta do segundo elemento da direcção;
- apresentação dos elementos recolhidos na utilização da calculadora **(ver nota)**.

Na tabela seguinte, indica-se como este item deve ser classificado:

Forma **Conteúdo**	Nível 3 (∗)	Nível 2 (∗∗)	Nível 1 (∗∗∗)
A composição contempla correctamente os quatro tópicos.	24	23	22
A composição contempla correctamente três tópicos.	18	17	16
A composição contempla correctamente dois tópicos.	12	11	10
A composição contempla correctamente um tópico.	6	5	4

(∗) **Nível 3** Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia.

(∗∗) **Nível 2** Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de sentido.

(∗∗∗) **Nível 1** Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, com perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

Nota: Se, na apresentação dos elementos recolhidos na utilização da calculadora, o examinando não apresentar todos os elementos necessários, ou se os apresentar com incorrecções, considera-se que a composição contempla o tópico em questão, cabendo ao professor classificador considerar a composição como sendo do **Nível 2** ou do **Nível 1**, de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos.

2.3. .... **20**

Indicar que existem 2730 não sócios.. 3

Indicar que existem 4095 sócios.. 2

Encontrar a probabilidade pedida
$\left(P(\text{«ambos serem sócios»}) = \dfrac{4095 \times 4094}{6825 \times 6824} \approx 0{,}36\right)$ **(ver nota)** 15

Nota:

Se o examinando escrever $P(\text{«ambos serem sócios»}) = \dfrac{4095^2}{6825 \times 6824}$, a classificação a atribuir nesta etapa deve ser de 11 pontos.

Se o examinando escrever $P(\text{«ambos serem sócios»}) = \dfrac{4095 \times 4094}{6825^2}$, a classificação a atribuir nesta etapa deve ser de 11 pontos.

Se o examinando escrever $P(\text{«ambos serem sócios»}) = \left(\dfrac{4095}{6825}\right)^2$, a classificação a atribuir nesta etapa deve ser de 8 pontos.

Se o examinando escrever $P(\text{«ambos serem sócios»}) = \dfrac{4095}{6825}$, a classificação a atribuir nesta etapa deve ser de 4 pontos.

3.1. .... **22**

Escrever $cos(\alpha) = \dfrac{\overline{OD}}{5}$ 4

Concluir que $\overline{OD} = 5\,cos\,\alpha$ 2

Concluir que $\overline{BD} = 10\,cos\,\alpha$ 2

Escrever $sen(\alpha) = \dfrac{\overline{OA}}{5}$ 4

Concluir que $\overline{OA} = 5\,sen\,\alpha$ 2

Concluir que $\overline{AC} = 10\,sen\,\alpha$ 2

Concluir que $A\,(\alpha) = 50\,sen\,\alpha\,.\,cos\,\alpha$..6

3.2. .... **22**

Escrever $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 50\,sen\,\frac{\pi}{4}\,.\,cos\,\frac{\pi}{4}$ 4

Determinar $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 25\,m^2$ 6

Interpretar o resultado 12

4.1. .... **18**

Constatar que $t = 3$ 3

Escrever $M(3) = \frac{100}{1+39\,e^{-0{,}49\times 3}}$ 5

$M(3) \approx 10{,}03$ **(ver nota)**.. 10

Nota: Se o examinando não respeitar o número de casas decimais, ou indicar um valor mal arredondado a classificação da etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

4.2. .... **22**

Referir que a função $M(t)$ é sempre crescente **(ver nota)** 11

Para tal, o examinando pode invocar uma de duas alternativas:

- abordagem gráfica, via calculadora;
- caracterização do processo de enchimento.

Concluir que $T.V.M._{[a\,;\,b]}$ é sempre positiva **(ver nota)**.................................11

Nota: Se o examinando tornar compreensível o seu raciocínio, mas não o fizer de um modo totalmente claro, a classificação total a atribuir na etapa deverá ser desvalorizada em 2 pontos.

5. .... **24**

Determinar a altura do triângulo $[HIJ]$ 6

Constatar que $[HIJ]$ é um triângulo equilátero de lado 8 3

Determinar $\overline{HL} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$ 3

Determinar a altura do triângulo $[ABC]$ 7

Determinar $\overline{AH} = 8$ 4

Determinar $\overline{AG} = 12 + 4\sqrt{3} \approx 18{,}928$ 3

Determinar o lado do triângulo $[ABC]$ $(l \approx 21{,}856\,)$..6

Conclusão final (são necessários 66 metros de rede)..5