Equações Cartesianas de Rectas no Espaço:

$$\frac{x-a_1}{r_1}=\frac{y-a_2}{r_2}=\frac{z-a_3}{r_3}$$

são **equações cartesianas** da recta **r** que passa por A (a_1, a_2, a_3) e tem a direcção de $\vec{r}\,(r_1, r_2, r_3)$.

Exemplo

Sendo A (1, 5, 0) e $\vec{r}$ (– 2, 3, 4), a recta que passa em A e tem a direcção de **r** é representada por: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{4}$

Nota: Deve saber escrever as equações cartesianas a partir das coordenadas de um ponto e de um vector director, mas também deve saber encontrar as coordenadas de pontos e de vectores directores de uma recta a partir das suas equações cartesianas.
Alguns exemplos:

Ex 48 (pg 145) novas alíneas:

e) $2x-4 = y+1 = 3-2z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{2x}{2}-\frac{4}{2}\right) = y+1 = -2\left(\frac{3}{-2}-\frac{2z}{-2}\right)$ (Esta passagem não é necessária)

$\Leftrightarrow 2(x-2) = y+1 = -2\left(-\frac{3}{2}+z\right)$

$\Leftrightarrow 2(x-2) = y+1 = -2\left(z-\frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{x-\overset{x_{ponto}}{2}}{\underset{x_{vector}}{\frac{1}{2}}} = \frac{y-\overset{y_{ponto}}{(-1)}}{\underset{y\ vector}{}} = \frac{z-\overset{z_{ponto}}{3/2}}{\underset{z\ vector}{\frac{1}{-2}}}$

Coord. de um ponto da recta: $\left(2; -1, -\frac{3}{2}\right)$

" " " vector director da recta: $\left(-\frac{1}{2}, 1; -\frac{1}{2}\right)$ $\qquad \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

f) $3x+24 = -2y = 9-18z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{3x}{3}+\frac{24}{3}\right) = -2y = -18\left(\frac{9^{:9}}{-18_{:9}}-\frac{18z}{-18}\right) \Leftrightarrow$ (esta passagem não é necessária)

$\Leftrightarrow 3(x+8) = -2y = -18\left(-\frac{1}{2}+z\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+8}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{-2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{18}}$

Coordenadas de um ponto: $\left(-8, 0, -\frac{1}{2}\right)$ e vector director $\left(\frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{18}\right)$

g) $x=3 \wedge y+2=0$

$\Leftrightarrow x=3 \wedge y=-2$

Um ponto pertence a esta recta se a sua abcissa for 3 ($x=3$) e a sua ordenada for -2 ($y=-2$). Não há nenhuma restrição ao z pelo que poderá ser qualquer. Assim, os pontos desta recta são do tipo $(3,-2,z)$ com $z \in \mathbb{R}$, por exemplo, $(3,-2,1)$ ou $(3,-2,-5)$, etc.

Por outro lado, se os pontos da recta têm todos $x=3$ e $y=-2$ significa que os vectores directores da recta não podem alterar os valores de x nem os valores de y, logo a 1ª coord. e a 2ª coord. dos vectores directores têm de ser nulas, quanto à 3ª coordenada pode ser um qualquer número real excepto o zero, uma vez que terá de permitir obter todos os valores para z ponto, além disso se

$\therefore$ Coordenadas de pontos da recta: $(3,-2,0)$

" " vector director: $(0,0,1)$

h) $x = 2y = -3z$

$$\Leftrightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1/2} = \frac{z-0}{-1/3}$$

Coordenadas de um ponto $(0,0,0)$

" " " vector director: $\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ ou $(6,3,-2)$ multiplicar as coordenadas anteriores por 6, por exemplo

NOTA: Para obter outros pontos dar valores a x ou y ou z.

Por exemplo, se $x=1$ obtém-se:

$x = 2y \underset{x=1}{\Leftrightarrow} 1 = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$ e $2y=-3z \underset{y=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} 2 \times \frac{1}{2} = -3z \Leftrightarrow z = -\frac{1}{3}$

logo o ponto será $\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ ou $x=-3z \underset{x=1}{\Leftrightarrow} 1=-3z \Leftrightarrow z=-\frac{1}{3}$