Resolução de sistemas pelo princípio da adição ordenada

PRINCÍPIO DA ADIÇÃO ORDENADA
Todo o sistema de equações é equivalente ao que dele resulta, substituindo uma qualquer das equações pela que se obtém adicionando, ordenadamente, os seus dois membros aos de outra qualquer equação do sistema.

Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$.

Resolução:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases} \underset{(c)}{\overset{(a)\,(b)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \text{———} \\ 4x-y \quad =6 \\ -4x-y=-2 \end{cases} \underset{(d)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\underset{(e)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=2 \\ 4x-(-2)=6 \\ ----- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ x=1 \\ ----- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+-2+z=2 \\ ----- \\ ----- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ ----- \\ ----- \end{cases}$$

A solução é $(1,-2,3)$

NOTAS:

(a) Escolher a equação mais simples mas também mais completa (de preferência com todas as incógnitas) para deixar quase até ao fim… Neste caso pode-se optar pela 1.ª equação. Assim no lugar da 1.ª equação fica um traço, que significa que a equação não vai ser alterada nesta passagem de resolução do sistema.

(b) Substituir a 2.ª equação pela adição ordenada da 1ª (deve utilizar-se preferencialmente a equação escolhida em (**a**)) com a 2ª. equação (deve utilizar-se aquela que se está a simplificar). Esta adição ordenada tem como objectivo eliminar uma incógnita, no caso o z, que é uma das letras mais simples de eliminar:

$$\begin{array}{ll} 1.^{\text{a}}\,equação: & x+\ \ y+z=2 \\ 2.^{\text{a}}\,equação: & 3x-2y-z=4 \\ \hline Soma: & 4x-y \qquad =6 \end{array}$$

(c) Eliminar a mesma incógnita que em (**b**), ou seja o z, utilizando a 1ª e 3ª equações (deve utilizar-se preferencialmente a equação escolhida em (**a**)) com a aquela que se está a simplificar). Para tal, substituir a 3ª equação pela adição ordenada de **(-2)×1.ª** com a 3.ª:

$$\begin{array}{ll} (-2)\,vezes\ a\ 1.^{\text{a}}\,equação: & -2x-2y-2z=-4 \\ 3.^{\text{a}}\,equação: & -2x+\ \ y+2z=\ \ 2 \\ \hline Soma: & -4x-y \qquad =-2 \end{array}$$

Observação: Assim o sistema passa a ter uma parte com duas equações a apenas duas incógnitas.

(d) Adaptar o processo anterior à parte do sistema de duas equações com duas incógnitas, ou seja, voltar a escolher uma das equações mais simples mas mais completa para mais tarde e utilizá-la para eliminar uma incógnita na outra equação. Assim, reservar a 2.ª equação, colocando um traço no seu lugar e substituir a 3.ª equação pela adição ordenada da 2.ª equação (a última reservada) com a 3.ª equação (aquela que se quer simplificar). Esta adição ordenada tem como objectivo eliminar uma incógnita, no caso o x e determinar o valor da outra incógnita, no caso o y:

$$\begin{array}{ll} 2.^{\text{a}}\,equação: & 4x - y = 6 \\ 3.^{\text{a}}\,equação: & -4x - y = -2 \\ \hline Soma: & -2y = 4 \Leftrightarrow y = -2 \end{array}$$

(e) Resolver o sistema substituindo as incógnitas já calculadas sucessivamente nas equações reservadas, começando da que tem menos incógnitas e terminando na que tem mais incógnitas. Assim, encontrado o valor do y, substitui-se o referido valor na equação reservada que tinha apenas duas incógnitas, no caso a 2.ª equação, e assim determina-se o valor de mais uma incógnita, no caso o x, finalmente substitui-se o x e o y, pelos valores encontrados, na equação reservada inicialmente que tem as três incógnitas, no caso a 1.ª e assim determina-se o valor da última incógnita, ou seja o z.