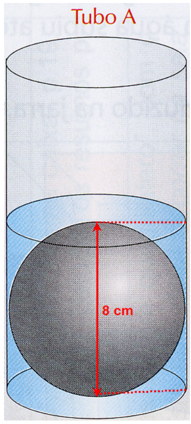
Uma resolução do Problema 4 da página 25 do Manual Espaço 10A (ASA)

1. A quantidade de água contida no frasco A é igual ao volume do tubo A até à altura da água menos o volume da esfera.

Como o tubo A é cilíndrico, o seu volume é igual ao produto da área da base pela altura.

Como a base é um círculo, temos que a sua área é o produto de π por r^2 , onde r é o raio que neste caso é $\frac{8}{2}=4cm$.



Por outro lado, a altura da água é igual ao diâmetro da esfera, ou seja 8 cm.

Assim, ao volume da parte do tubo A que tem a água e a esfera é

$$A_{base} \text{ x Altura} = \pi \text{ x } r^2 \text{x}8 = \pi \text{ x } 4^2\text{x}8 = \pi \text{ x } 16\text{x}8 = \pi \text{ x } 128 = 128\,\pi$$

O volume da esfera é

$$V_E = \frac{4}{3}\pi\times r^3 = \frac{4}{3}\pi\times 4^3 = \frac{4}{3}\pi\times 64 = \frac{4}{3}\pi\times\frac{64}{1} = \frac{4\times 64}{3\times 1}\pi = \frac{256}{3}\pi$$

Pelo que a quantidade de água é a diferença entre os valores acabados de determinar:

$$128\pi - \frac{256}{3}\pi = \underset{(3)}{\frac{128}{1}}\pi - \underset{(1)}{\frac{256}{3}}\pi = \frac{128\times 3}{1\times 3}\pi - \frac{256}{3}\pi = \frac{384}{3}\pi - \frac{256}{3}\pi = \frac{128}{3}\pi \approx 134{,}04cm^3$$

Mas $1dm^3 = 1\ell$, ou seja $1cm^3 = 1m\ell$ e então, o volume da água é 134 mℓ, aproximado às unidades.

2.

Para calcular o volume de água do tubo B, procede-se de forma análoga à questão anterior, tendo em atenção que:

- O raio da base do tubo B é igual ao do tubo A;
- A altura da água é igual ao diâmetro da nova esfera, ou seja 4 cm;
- O volume de água no tubo B vai ser igual ao volume do tubo B até à altura da água menos o volume das duas esferas.

Volume do Tubo B até à altura da água:

$$A_{base} \text{ x Altura} = \pi \text{ x } r^2\text{x}4 = \pi \text{ x } 4^2\text{x}4 = \pi \text{ x } 16\text{x}4 = \pi \text{ x } 64 = 64\,\pi$$

O volume de cada esfera é

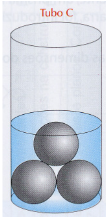
$$V_E = \frac{4}{3}\pi\times r^3 = \frac{4}{3}\pi\times 2^3 = \frac{4}{3}\pi\times 8 = \frac{4}{3}\pi\times\frac{8}{1} = \frac{4\times 8}{3\times 1}\pi = \frac{32}{3}\pi$$

Pelo que a quantidade de água é:

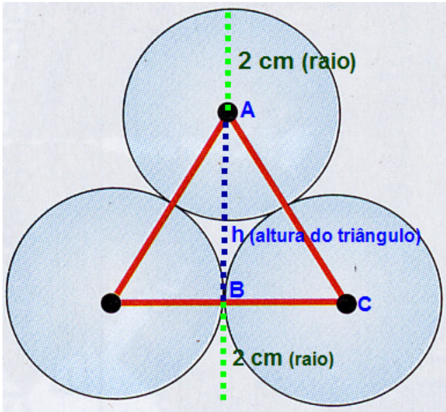
$$64\pi - 2\times\frac{32}{3}\pi = \underset{(3)}{\frac{64}{1}}\pi - \underset{(1)}{\frac{64}{3}}\pi = \frac{64\times 3}{1\times 3}\pi - \frac{64}{3}\pi = \frac{192}{3}\pi - \frac{64}{3}\pi = \frac{128}{3}\pi$$

que é o mesmo valor encontrado na alínea anterior.

3.



3.1. O valor exacto da altura da água pode decompor-se em dois raios (assinalados a verde na figura abaixo) e uma altura de um triângulo equilátero (h assinalado a azul) cujos lados são iguais ao diâmetro da esfera



Para determinar a altura h, aplicamos o Teorema de Pitágoras ao Δ[ABC], que é rectângulo em B, a hipotenusa é [AC] (lado oposto ao ângulo de 90º) que tem por comprimento o dobro do raio de uma esfera (4cm) , o cateto conhecido é [BC] que é o raio de uma esfera e portanto $\overline{BC} = 2$. Assim,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow h^2 + 2^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow h^2 = 16 - 4 \Leftrightarrow h^2 = 12 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{12}$$

Mas como os comprimentos não são negativos, tem-se que $h = \sqrt{12}$ cm e então a altura da água no Tubo C é $4 + \sqrt{12}\ cm$.

3.2.

Volume do Tubo C até à altura da água:

$$\pi \times r^2 \times \left(4 + \sqrt{12}\right) = \pi \times 4^2 \times \left(4 + \sqrt{12}\right) \approx 357{,}186688$$

O volume de cada esfera foi determinado na questão 2, é $\frac{32}{3}\pi$

Pelo que a quantidade de água é, aproximadamente:

$$357{,}186688 - 3 \times \frac{32}{3}\pi \approx 274{,}6557 cm^3$$

Mas $1cm^3 = 1m\ell$ e então um valor aproximado do referido volume é $274{,}6557 m\ell$, que em litros é aproximadamente $0{,}274\ell$.

A resposta, arredondada às centésimas (2 casas decimais) é $0{,}27\ell$