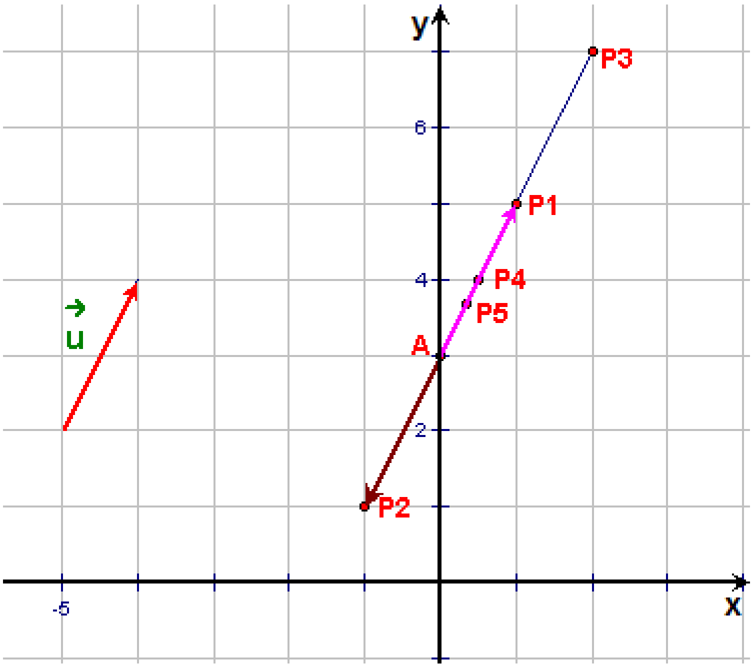
EQUAÇÕES VECTORIAIS E EQUAÇÃO REDUZIDA

Considere um ponto A e um vector $\vec{u}$.

Onde se situa $A+\vec{u}$, $A-\vec{u}$, $A+2\vec{u}$, $A+\frac{1}{2}\vec{u}$, $A+\frac{1}{3}\vec{u}$?

Como a soma de um ponto com um vector é um ponto, sejam:

$A+\vec{u}=P1$, $A-\vec{u}=P2$, $A+2\vec{u}=P3$, $A+\frac{1}{2}\vec{u}=P4$, $A+\frac{1}{3}\vec{u}=P5$. Todos estes pontos situam-se sobre a recta que passa no ponto A e tem a direcção do vector $\vec{u}$, como se ilustra na figura seguinte:



Assim, a recta que passa no ponto A e tem a direcção do vector $\vec{u}$ é o conjunto de todos os pontos P , que verificam a condição

$$P=A+k\,\vec{u}\,,k\in\mathbb{R}$$

ou seja, para que um ponto P pertença à recta definida pelo ponto A e pelo vector $\vec{u}$, terá de existir um número real k tal que $P=A+k\,\vec{u}\,,k\in\mathbb{R}$.

Para o caso dos pontos anteriormente referidos temos que:

- Para o ponto P1 o valor de k é 1;
- Para o ponto P2 o valor de k é -1;
- Para o ponto P3 o valor de k é 2;
- Para o ponto P4 o valor de k é 1/2;
- Para o ponto P5 o valor de k é 1/3;
- Para o ponto A o valor de k é 0;

Se $A(0,3)$ e $\vec{u}(1,2)$ então uma equação vectorial da recta que passa no ponto A e tem a direcção do vector $\vec{u}$ é

Coordenadas de qualquer ponto da recta

$$(x,y)=(0,3)+k(1,2)\,,k\in\mathbb{R}$$

Coordenadas de um ponto dado da recta

Coordenadas de um vector director da recta

Exercícios:

1 . Encontre uma equação vectorial da recta definida pelos pontos $A(-2,1)$ e $B(4,5)$

Para escrevermos a equação vectorial de uma recta necessitamos de um ponto, por exemplo o ponto A e de um vector. Através dos pontos dados podemos obter um vector director, por exemplo o vector $\overrightarrow{AB}$. Comecemos por determinar as coordenadas do vector: $\overrightarrow{AB}=B-A=(4-(-2),5-1)=(6,4)$.
Assim, uma equação vectorial da recta definida pelos pontos A e B , pode ser:

$$(x,y)=(-2,1)+k(6,4), k\in \mathbb{R}$$

2 . Considere a recta definida pela equação $(x,y)=(0,4)+k(2,3), k\in \mathbb{R}$.

2.1 . Indique as coordenadas de três pontos da recta.

Um ponto retira-se directamente da equação, trata-se do ponto de coordenadas $(0,4)$.

> Para encontrar as coordenadas de um ponto de uma recta dada por uma equação vectorial basta dar um valor a k e efectuar os cálculos.

Assim, por exemplo para k=1 obtém-se:

$$(x,y)=(0,4)+1\times(2,3)\Leftrightarrow(x,y)=(0,4)+(2,3)\Leftrightarrow(x,y)=(2,7)$$

e para k=2 obtém-se:

$$(x,y)=(0,4)+2\times(2,3)\Leftrightarrow(x,y)=(0,4)+(4,6)\Leftrightarrow(x,y)=(4,10)$$

Portanto, as coordenadas de três pontos da recta são, por exemplo, $(0,4)$, $(2,7)$ e $(4,10)$

2.2 . Indique as coordenadas de dois vectores directores da recta.

As coordenadas de um vector director da recta retiram-se directamente da equação vectorial da recta, no caso é o vector de coordenadas $(2,3)$ (coordenadas que estão junto ao k)

> Conhecidas as coordenadas de um vector $\vec{u}$ director de uma recta, todos os vectores $k\vec{u}$, com $k\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ são vectores directores da mesma recta.

Assim, o vector de coordenadas $2\times(2,3)=(4,6)$ ém também um vector director da recta.

2.3 . Escreva uma equação vectorial da recta s paralela à recta dada e que passa no ponto $B(-3,4)$.

> Duas rectas paralelas têm os mesmos vectores directores

Assim, um vector director da recta s é um vector director da recta dada, ou seja, o vector de coordenadas $(2,3)$, pelo que uma equação vectorial da recta s é:

$$(x,y)=(-2,4)+k(2,3), k\in \mathbb{R}$$

2.4 . Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta com o eixo das abcissas.

Todos os pontos do eixo das abcissa têm o y=0.

Assim, para encontrar o ponto de intersecção da recta com o eixo das abcissas, basta substituir na equação o y por zero:

$$
\begin{aligned}
(x,0)=(0,4)+k(2,3) &\Leftrightarrow (x,0)=(0,4)+(2k,3k)\\
&\Leftrightarrow (x,0)=(0+2k,4+3k)\\
&\Leftrightarrow x=2k \wedge 0=4+3k\\
&\Leftrightarrow x=2k \wedge -3k=4\\
&\Leftrightarrow x=2k \wedge 3k=-4\\
&\Leftrightarrow x=2k \wedge k=-\frac{4}{3}\\
&\Leftrightarrow x=2\times\left(-\frac{4}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

e então a resposta é o ponto $\left(-\frac{8}{3},0\right)$

2.5 . Simplifique a equação vectorial da recta transformando-a numa equação do tipo $y=mx+b$, com $m,b\in\mathbb{R}$. Investigue como poderia obter os valores de m e de b sem efectuar todos os cálculos.

Tem-se sucessivamente,

$$
\begin{aligned}
(x,y)=(0,4)+k(2,3) &\Leftrightarrow (x,y)=(0,4)+(2k,3k)\\
&\Leftrightarrow (x,y)=(0+2k,4+3k)\\
&\Leftrightarrow x=2k \wedge y=4+3k\\
&\Leftrightarrow 2k=x \wedge -3k=4-y\\
&\Leftrightarrow k=\frac{x}{2} \wedge 3k=y-4\\
&\Leftrightarrow k=\frac{x}{2} \wedge k=\frac{y-4}{3}\\
&\Leftrightarrow \underset{(3)}{\frac{x}{2}}=\underset{(2)}{\frac{y-4}{3}}\\
&\Leftrightarrow 3x=2y-8\\
&\Leftrightarrow -2y=3x-8\\
&\Leftrightarrow 2y=3x+8\\
&\Leftrightarrow y=\frac{3x}{2}+\frac{8}{2}\\
&\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+4
\end{aligned}
$$

que é uma equação do tipo $y=mx+b$ em que $m=\frac{3}{2}$ e 4 . Comparando estes valores com as coordenadas do vector director da recta, $(2,3)$, e do ponto da recta $(0,4)$, que é o ponto de intersecção da recta com o eixo das ordenadas (já que a primeira coordenada é zero), tem-se que:

$$m=\frac{\textit{segunda coordenada de um vector director da recta}}{\textit{primeira coordenada do mesmo vector director da recta}}$$

$$b=\textit{segunda coordenada do ponto de intersecção da recta com o eixo dos } y$$

ao m dá-se o nome de DECLIVE da recta, a b dá-se o nome de ORDENADA NA ORIGEM e à equação $y=mx+b$ dá-se o nome de EQUAÇÃO REDUZIDA DA RECTA.

3 . Considere a recta definida pela equação $y=5x-3$.

3.1 . Indique as coordenadas de dois pontos da recta.

Um ponto retira-se directamente da equação, trata-se do ponto de coordenadas $(0,-3)$.

Para encontrar as coordenadas de um ponto de uma recta dada pela equação reduzida basta dar um valor a x e efectuar os cálculos para determinar o y , ou vice-versa.

Assim, por exemplo para x=1 obtém-se: $y=5\times1-3 \Leftrightarrow y=2$ e então temos o ponto de coordenadas $(1,2)$.

3.2 . Indique as coordenadas de um vector director da recta.

Um vector director pode obter-se a partir do valor do declive da recta, uma vez que :

Na equação reduzida de uma recta, o valor de m (aquele que aparece na referida equação com o x) é igual à segunda coordenada de um vector director a dividir pela primeira coordenada do mesmo vector.

Assim, $m=5=\frac{5}{1}$ e então as coordenadas de um vector director são $(1,5)$

3.3 . Indique as coordenadas do ponto de intersecção da recta com o eixo das abcissas.

Trata-se do ponto da recta em que o y=0. Assim, basta substituir o y por zero na equação da recta : $0=5x-3 \Leftrightarrow -5x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$ e portanto o ponto de intersecção da recta com o eixo das abcissa é o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{5},0\right)$.

3.4 . Escreve a equação reduzida de uma recta paralela à dada e que passa no ponto de coordenadas (3, -2).

Duas rectas paralelas têm os mesmos vectores directores e, portanto, têm o mesmo declive.

Assim o declive da recta em causa é m=5.

Para determinar a valor de b, ordenada na origem de uma recta devemos:

- determinar o declive da recta;
- substituir o valor do declive encontrado na equação y=mx+b;
- substituir na equação anterior o x e o y pelas coordenadas de um ponto da recta e resolver a equação em ordem a b, encontrando assim o seu valor.

Determinado o declive, a equação da recta passa a ser $y=5x+b$. Como a recta passa no ponto $[3,-2]$, substituindo estas coordenadas na equação da recta tem-se:

$$-2=5\times3+b \Leftrightarrow -b=15+2 \Leftrightarrow b=-17$$

e então a equação da recta é $y=5x-17$