1.

Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia eléctrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: energia de origem convencional, maioritariamente resultante da combustão de *fuel*, ou, em alternativa, energia eólica.

Para uma cobertura razoável de iluminação, no período nocturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a $40\ MWh$.

Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida.

Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 80 euros.

Relativamente à energia eólica, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 90 euros;
- o fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os $40\ MWh$.

Represente por x a quantidade de energia de origem convencional e por y a quantidade de energia eólica consumidas pela autarquia.

Determine que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- *indique as restrições do problema;*
- *indique a função objectivo;*
- *represente graficamente a região admissível (referente ao sistema das restrições);*
- *indique os valores de x e y para os quais é mínima a função objectivo.*

Soluções e Critérios:

Indicar as restrições 8

$x \geq 0$ 1

$y \geq 0$ 1

$y \leq 40$ 2

$x + y \geq 40$ 2

$y \geq x$ 2

Indicar a função objectivo: $(C(x, y) = 80\,x + 90\,y)$ 4

Representar graficamente a região admissível 6

Representar correctamente $x + y = 40$.. 2

Representar correctamente $y = x$.. 2

Representar correctamente $y = 40$.. 2

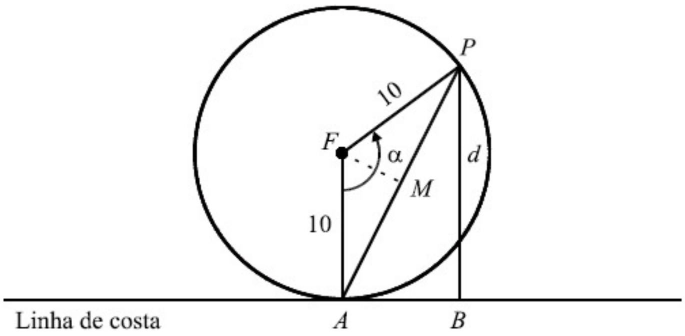
Indicar os valores de x e y para os quais é mínima a função objectivo

$(x = 20$ e $y = 20)$.. 4

2.

Um farol (ponto F), situado numa ilha, encontra-se a $10\,km$ da costa. Nesta, sobre a perpendicular tirada do farol, está um observador (ponto A).

A luz do farol descreve sucessivos círculos e tem um alcance de $10\,km$. Em cada instante, o farol ilumina segundo uma trajectória rectilínea, com extremidade num ponto P, que percorre a circunferência representada na figura seguinte.



Sejam:

- α a amplitude, em graus, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{F}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{F}P$
- M o ponto médio de $[AP]$
- $\overline{PB}$ a distância do ponto P à costa

Mostre que, para $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$:

2.1 a distância, $\overline{AP}$, expressa em quilómetros, do observador ao ponto P é dada, em função de α, por

$$\overline{AP} = 20\,sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

2.2 a distância, d, expressa em quilómetros, do ponto P à costa é dada, em função de α, por

$$d(\alpha) = 20\,sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- *escreva* $F\widehat{A}P$*, em função de* α
- *escreva* $P\widehat{A}B$*, em função de* α
- *escreva* $\overline{BP}$*, em função de* α

Soluções e critérios:

2.1

Reconhecer que $P\widehat{F}M = \frac{\alpha}{2}$ ou $A\widehat{F}M = \frac{\alpha}{2}$ 5

Escrever $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{MP}}{10}$ 7

Concluir que $\overline{AP} = 20\,sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 7

2.2

Reconhecer que $F\widehat{A}P = 90 - \frac{\alpha}{2}$ 6

Reconhecer que $P\widehat{A}B = \frac{\alpha}{2}$ **(ver nota)**..6

Escrever $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{\overline{AP}}$ 4

Concluir que $d(\alpha) = 20\,sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 6