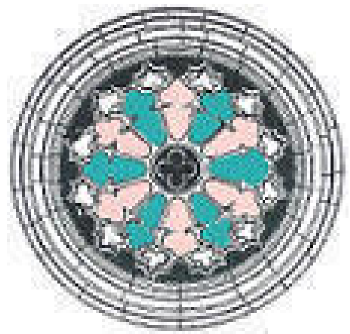
Escola Secundária de Alcochete

11.º Ano – Matemática A

Geometria no Plano e no Espaço II



REDUÇÃO AO 1.º QUADRANTE

O que é?

Reduzir um ângulo ao 1.º quadrante consiste em determinar um ângulo positivo do 1.º quadrante, cujas razões trigonométricas tenham, em valor absoluto, valores iguais às do ângulo dado.

Ou seja, dado um ângulo de amplitude α qualquer, procura-se um ângulo do primeiro quadrante que apresente os mesmos valores para as razões trigonométricas, a menos do sinal.

Não se está a dizer que os ângulos vão ter os mesmos valores para as razões trigonométricas ou que o sinal das mesmas vai ser obrigatoriamente diferente!

Apenas se afirma que pode, ou não, haver diferença de sinal na comparação de cada uma das razões trigonométricas

No que se apresenta seguidamente, considera-se um ângulo de amplitude α do primeiro quadrante.

Mas as conclusões que forem tiradas são válidas para ângulos de qualquer quadrante.

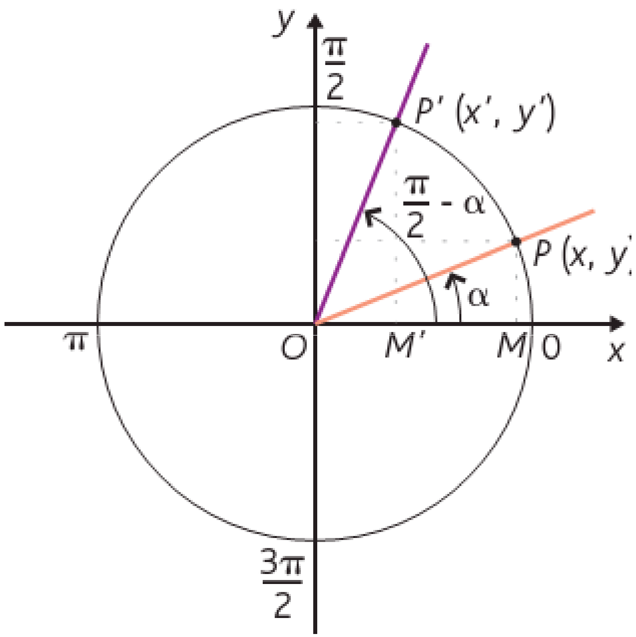
Relações entre Razões Trigonométricas de Ângulos Complementares

Recordando…

Dois ângulos, de amplitudes α e β, são complementares se $\alpha+\beta=90^\circ$ ou $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ *rad.*

Considere-se α um ângulo do primeiro quadrante. Tem-se que $\frac{\pi}{2}$-α e α são ângulos complementares, pois

$$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\alpha=\frac{\pi}{2}$$

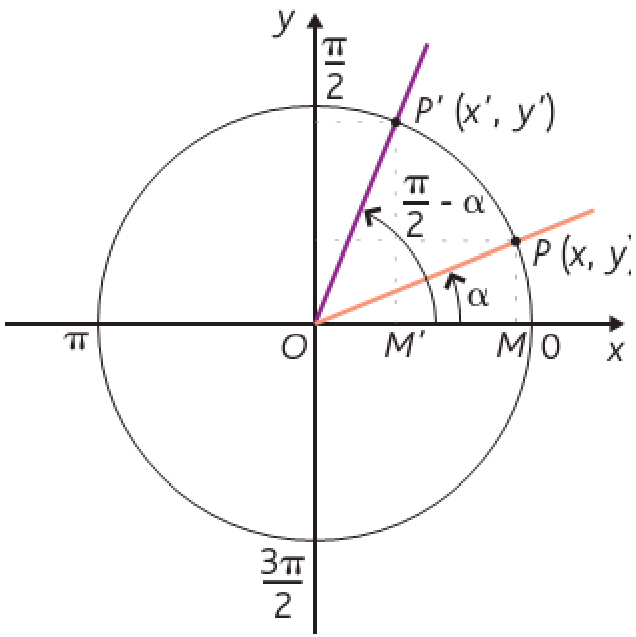


Por outro lado...

Pelo facto de a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser igual a π...

$$O\hat{P'}M'=\alpha \quad \text{e} \quad O\hat{P}M=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

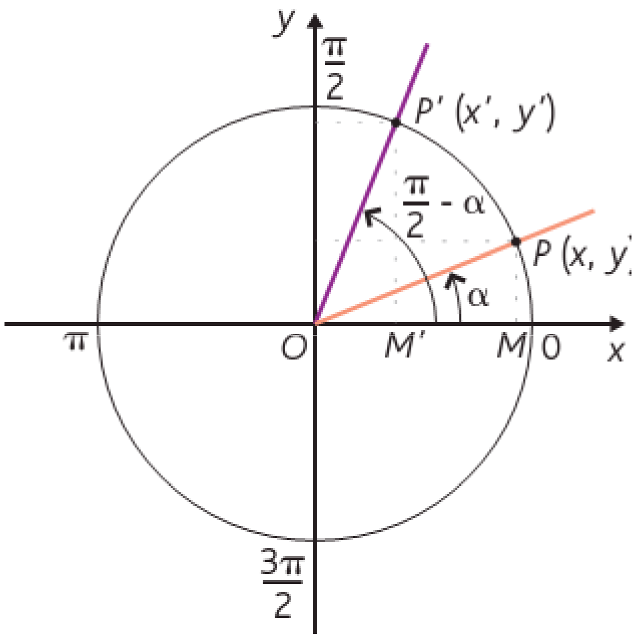
Assim sendo... → Constata-se que os triângulos [OMP] e [P'M'O] são geometricamente iguais.



Então, pelas propriedades da igualdade geométrica de triângulos e pelas definições das razões trigonométricas envolvidas

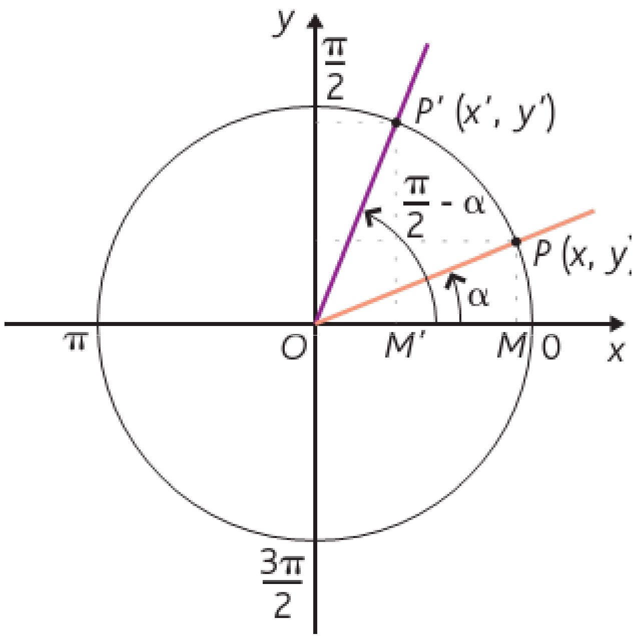
$$sen\alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OP'}} = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad cos\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{OP'}} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

E... Conhecendo propriedades que relacionam os valores de seno, co-seno e tangente de um ângulo



$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Resumindo...



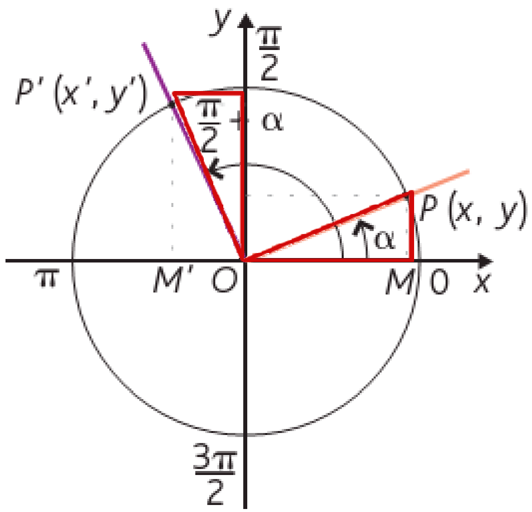
$$sen\alpha = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$tg\alpha = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

RELAÇÕES ENTRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ÂNGULOS DE AMPLITUDES α E $\frac{\pi}{2}+\alpha$

Usando raciocínios análogos ao caso anterior...

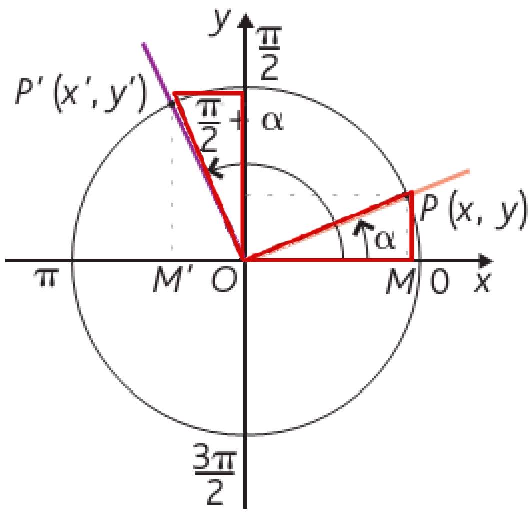


Obtêm-se dois triângulos geometricamente iguais.

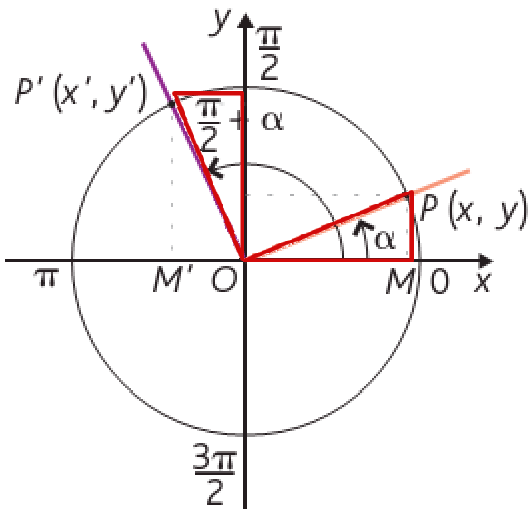
E pelo facto de se estar perante um círculo trigonométrico

$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = y' = x = cos\alpha \qquad cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = x' = -y = -sen\alpha$$

E... Conhecendo propriedades que relacionam os valores de seno, co-seno e tangente de um ângulo



$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\frac{cos\alpha}{sen\alpha}=-\frac{1}{tg\alpha}$$



Resumindo...

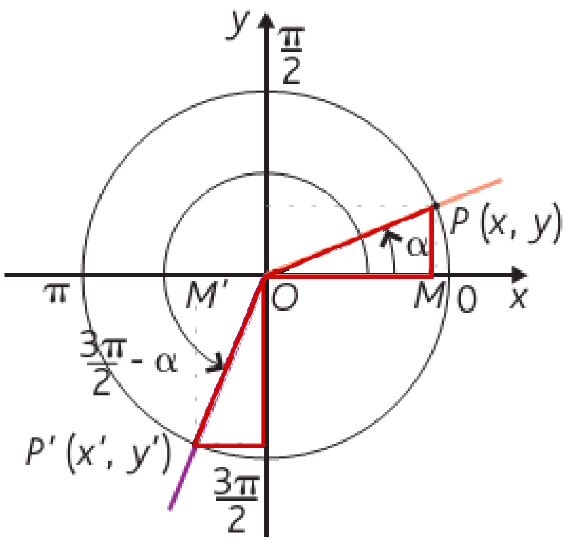
$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=cos\alpha$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-sen\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{tg\alpha}$$

RELAÇÕES ENTRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ÂNGULOS DE AMPLITUDES α E $\frac{3\pi}{2}$-α

Usando raciocínios análogos ao primeiro caso...



Obtêm-se dois triângulos geometricamente iguais.

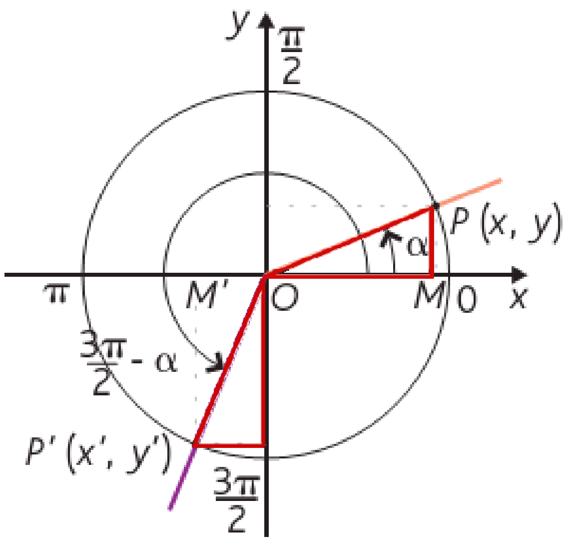
E pelo facto de se estar perante um círculo trigonométrico

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=y'=-x=-cos\alpha$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=x'=-y=-sen\alpha$$

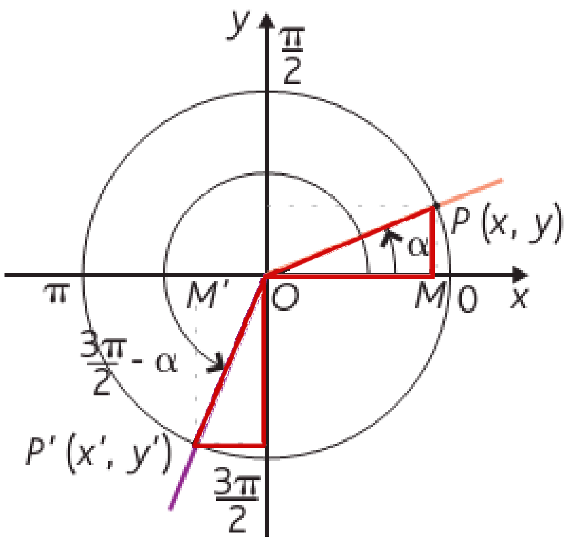
E...

Conhecendo propriedades que relacionam os valores de seno, co-seno e tangente de um ângulo



$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{-cos\alpha}{-sen\alpha}=\frac{1}{tg\alpha}$$

Resumindo...



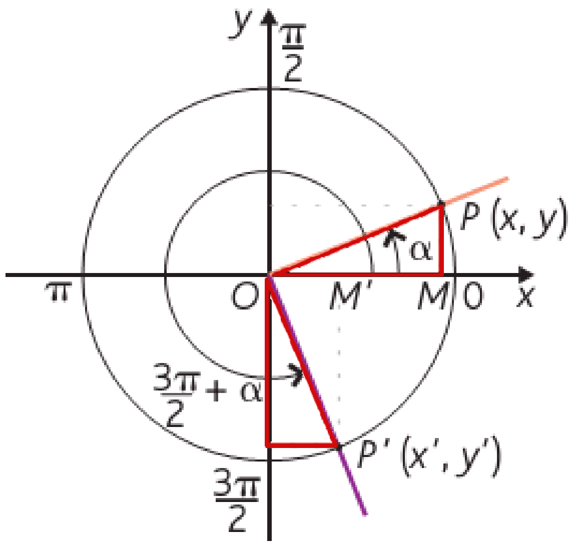
$$sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -cos\alpha$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -sen\alpha$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{tg\alpha}$$

RELAÇÕES ENTRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ÂNGULOS DE AMPLITUDES α E $\frac{3\pi}{2}+\alpha$

Usando raciocínios análogos ao primeiro caso...



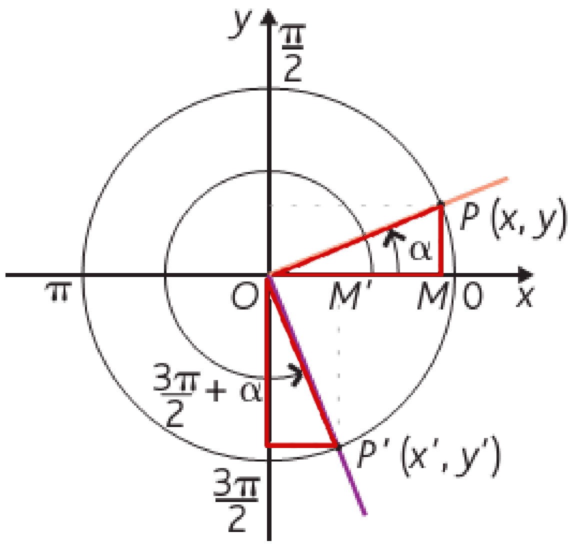
Obtêm-se dois triângulos geometricamente iguais.

E pelo facto de se estar perante um círculo trigonométrico

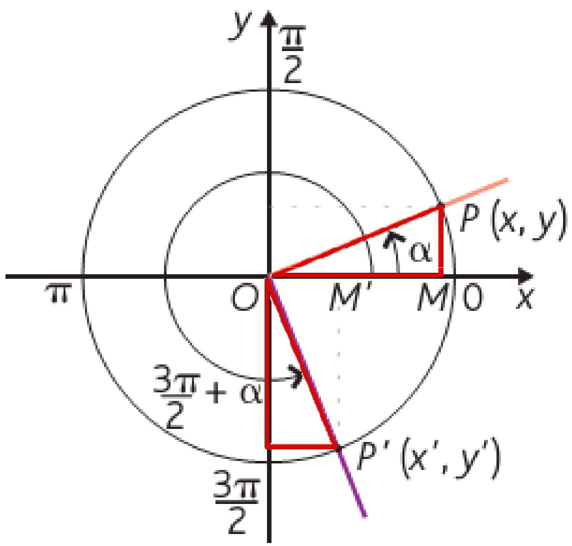
$$sen\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=y'=-x=-cos\alpha$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=x'=y=sen\alpha$$

E... Conhecendo propriedades que relacionam os valores de seno, co-seno e tangente de um ângulo



$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=-\frac{cos\alpha}{sen\alpha}=-\frac{1}{tg\alpha}$$



Resumindo...

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -cos\alpha$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = sen\alpha$$

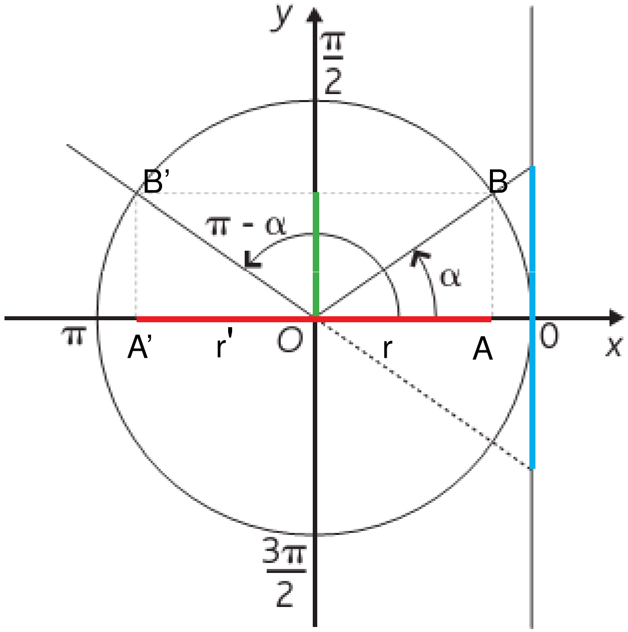
$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\frac{1}{tg\alpha}$$

Relações entre Razões Trigonométricas de Ângulos Suplementares

Recordando…

Dois ângulos, de amplitudes α e β, são sumplementares se $\alpha+\beta=180^\circ$ ou $\alpha+\beta=\pi$ *rad.*

Considere-se α um ângulo do primeiro quadrante. Tem-se que π-α e α são ângulos suplementares, pois



$$(\pi-\alpha)+\alpha=\pi$$

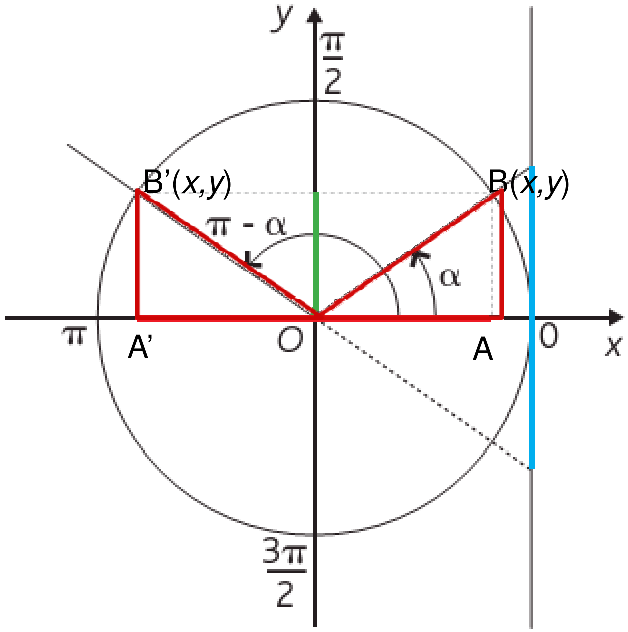
Por outro lado...

E considerando o facto acima descrito.

$$A'\hat{O}B' = \alpha$$

Assim sendo...

Constata-se que os triângulos [OA'B'] e [OAB] são geometricamente iguais.

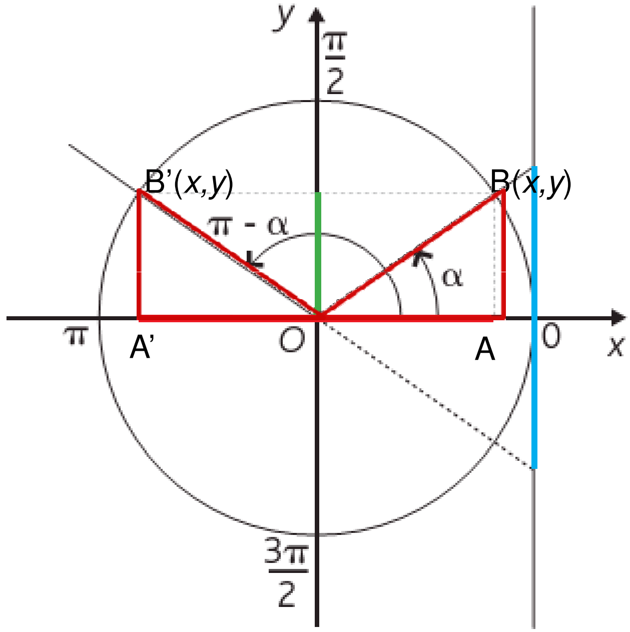


Então, pelas propriedades da igualdade geométrica de triângulos e pelo facto de se estar perante um círculo trigonométrico

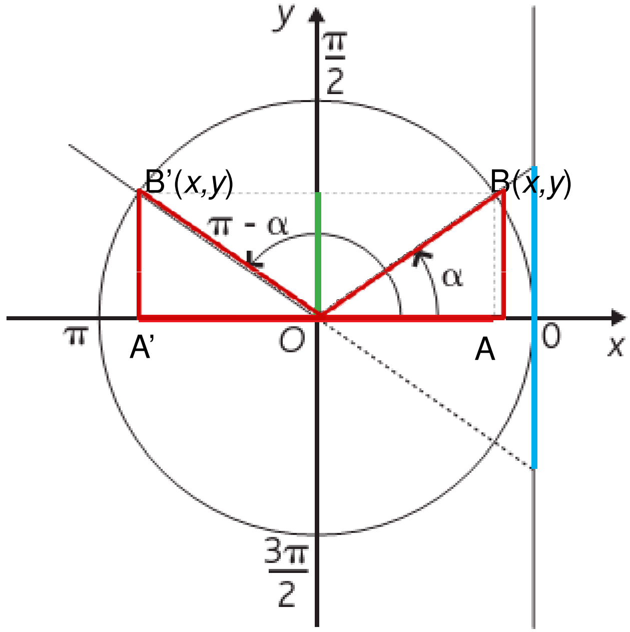
$$sen(\pi - \alpha) = y = sen\alpha$$

$$cos(\pi - \alpha) = x' = -x = -cos\alpha$$

E... Conhecendo propriedades que relacionam os valores de seno, co-seno e tangente de um ângulo



$$tg(\pi - \alpha) = \frac{sen(\pi - \alpha)}{cos(\pi - \alpha)} = -\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = -tg\alpha$$



Resumindo...

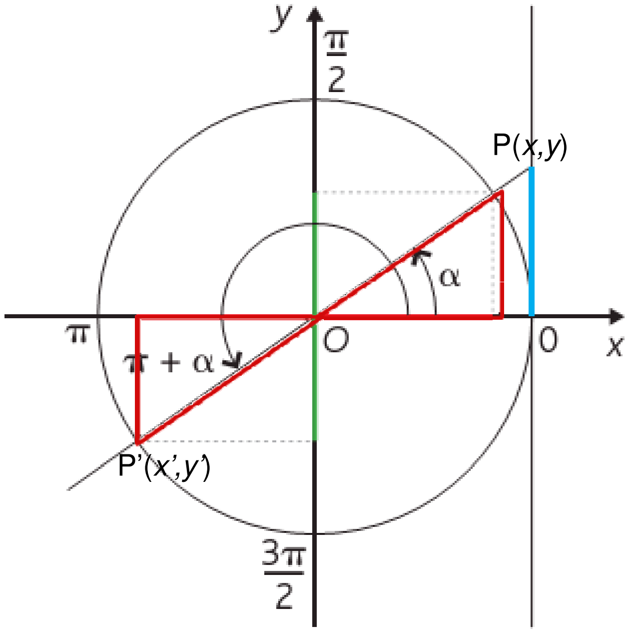
$$sen(\pi - \alpha) - sen\alpha$$

$$cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$

$$tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$$

RELAÇÕES ENTRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ÂNGULOS DE AMPLITUDES α E $\pi+\alpha$

Usando raciocínios análogos ao caso anterior...

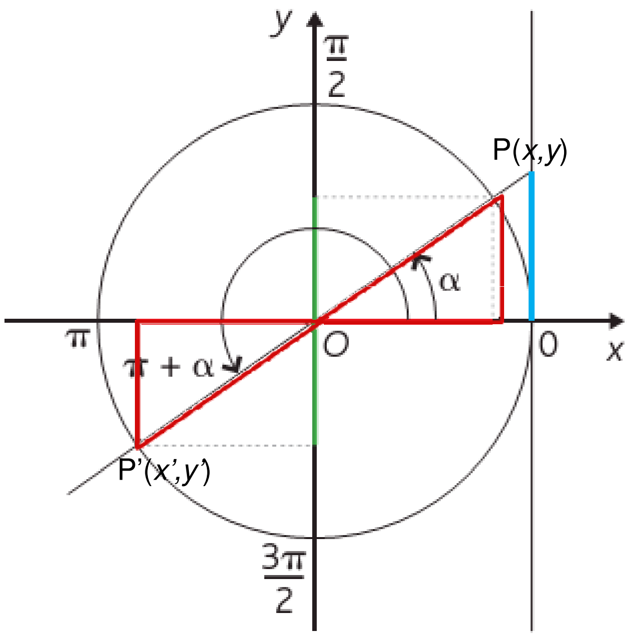


Obtêm-se dois triângulos geometricamente iguais.

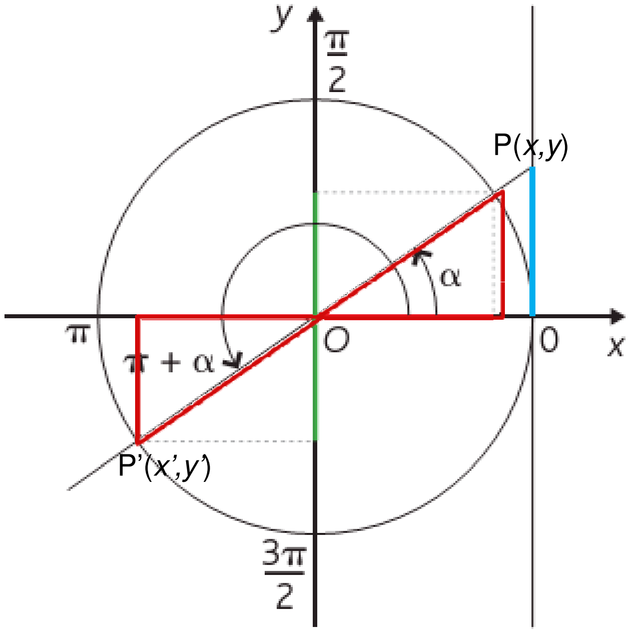
E pelo facto de se estar perante um círculo trigonométrico

$$sen(\pi+\alpha) = y' = -y = -sen\alpha \qquad cos(\pi+\alpha) = x' = -x = -cos\alpha$$

E... Conhecendo propriedades que relacionam os valores de seno, co-seno e tangente de um ângulo



$$tg(\pi+\alpha)=\frac{sen(\pi+\alpha)}{cos(\pi+a)}=\frac{-sen\alpha}{-cos\alpha}=\frac{sen\alpha}{cos\alpha}=tg\alpha$$



Resumindo...

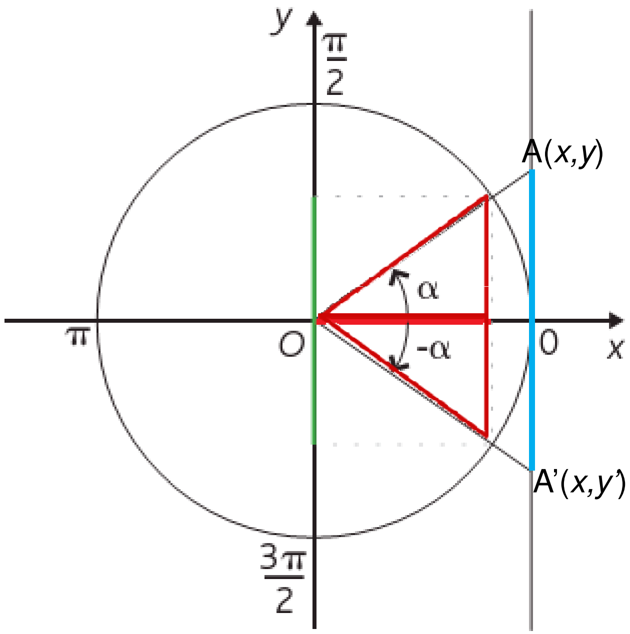
$$sen(\pi + \alpha) = -sen\alpha$$

$$cos(\pi + \alpha) = -cos\alpha$$

$$tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$$

Relações entre Razões Trigonométricas dos Ângulos de amplitudes α e $-\alpha$

Usando raciocínios análogos ao primeiro caso...

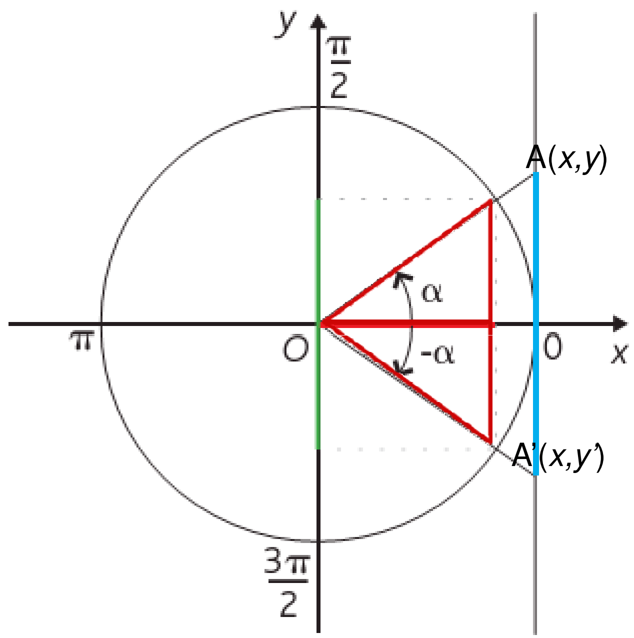


Obtêm-se dois triângulos geometricamente iguais.

E pelo facto de se estar perante um círculo trigonométrico

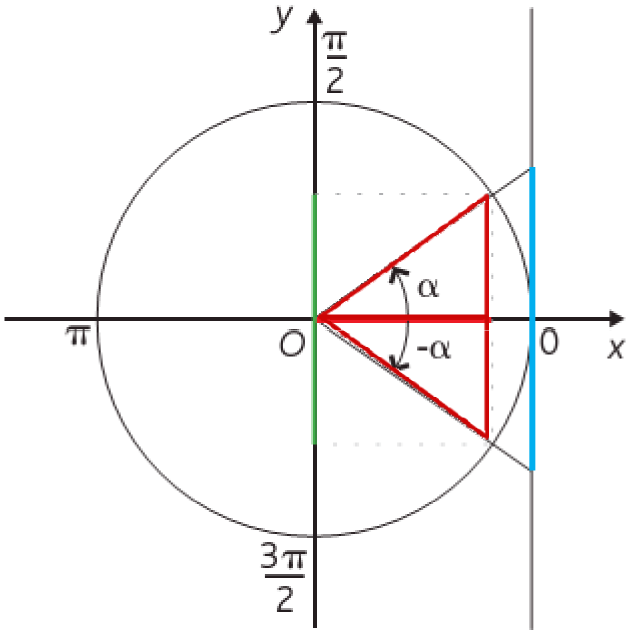
$$sen(-\alpha) = y' = -y = -sen\alpha \qquad cos(-\alpha) = x = cos\alpha$$

E... Conhecendo propriedades que relacionam os valores de seno, co-seno e tangente de um ângulo



$$-tg\alpha = -\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{sen(-\alpha)}{cos(-\alpha)} = tg(-\alpha)$$

Resumindo...

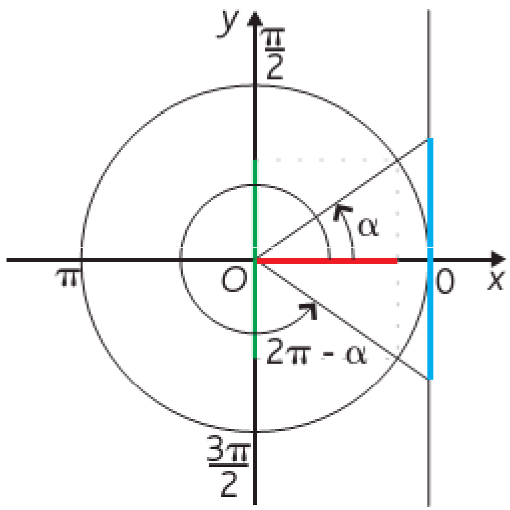


$$sen(-\alpha) = -sen\alpha$$

$$cos(-\alpha) = cos\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

Relações entre Razões Trigonométricas dos Ângulos de amplitudes α e 2π-α



Observando que os ângulos de amplitudes -α e 2π-α têm iguais amplitudes, divergindo apenas no sentido em que são marcados

Então, baseando nos resultados anteriores...

sen(2π-α)=-sen(α)
cos(2π-α)=cos(α)
tg(2π-α)=-tg(α)