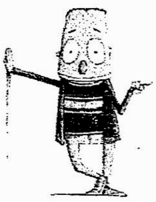
Inequações de 2.º grau

Funções

Inequação



Uma inequação é uma desigualdade onde figuram uma ou mais variáveis.

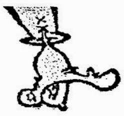
Aos valores da variável que transformam a inequação numa desigualdade verdadeira chamam-se soluções da inequação, que podem ser representadas na forma de intervalo de número reais.

Resolver uma inequação é encontrar o seu conjunto solução. Até agora só aprendeste a resolver inequações de 1.º grau. Para ver se ainda te recordas. Resolve a inequação do exercício 1.

EXERCÍCIO 1

Resolve a inequação seguinte, apresentando o conjunto solução na forma de intervalo:

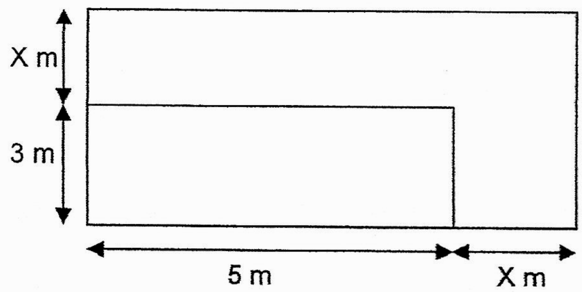
$$5-\frac{x+5}{2}>\frac{x}{3}$$



Inequações de 2.º grau

ACTIVIDADE

Considera um rectângulo em que um dos lados tem 5 cm de comprimento e de outro 3m. Qual é o maior número inteiro que se deve juntar a cada uma das medidas dos lados para se obter um rectângulo com área que não exceda os 63 m^2?



A área do rectângulo é dada pela expressão:

$$A=(5+x)(3+x)$$

Como a área não pode exceder os 63 m^2, então:

$(5+x)(3+x)\leq 63$

$\Leftrightarrow 15+5x+3x+x^2\leq 63$

$\Leftrightarrow x^2+8x-48\leq 0$

A solução desta inequação pode ser encontrada através do estudo do sinal da função quadrática $y=x^2+8x-48$. Vamos ver nos próximos exemplos como se processa esse estudo.

EXEMPLO 1

Considera a seguinte inequação:

$$x^2 + 3x + 1 > 5$$

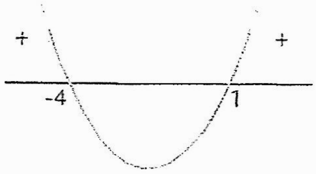
1.º) Começamos por resolver a inequação, simplificando todos os seus termos e colocando-os todos do lado esquerdo do sinal.

$$x^2 + 3x + 1 > 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$$

2.º) Como a solução da inequação pode ser encontrada através do estudo do sinal da função $y = x^2 + 3x - 4$, calculamos os seus zeros e fazemos um esboço do gráfico da função.

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

Como a concavidade da parábola é voltada para cima, pois temos a>0, temos:



3.º) Os valores de x para os quais a inequação é maior do que zero, são os valores de x onde a função é positiva, isto é, o conjunto solução. Então:

$$x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$$

EXEMPLO 2

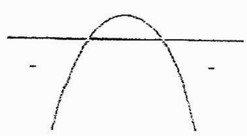
Resolve a seguinte inequação:

$$x^2 - 10x - 8 \geq 3x^2$$

1.º) $x^2 - 3x^2 - 10x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 10x - 8 \geq 0$

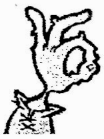
2.º) $-2x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times (-2) \times (-8)}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \dfrac{10 \pm \sqrt{36}}{-4} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1$

Como a concavidade da parábola é voltada para baixo, pois temos a<0, temos:



3.º) Os valores de x para os quais a inequação é maior ou igual a zero, são os valores de x onde a função é positiva e zero, isto é, o conjunto solução. Então:

$$x \in [-4, -1]$$



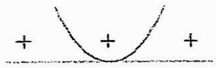
EXEMPLO 3

Resolve a seguinte inequação:

$$x^2+6x+9>0$$

1.º) $x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-4\times1\times9}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x=-3$ Temos um só zero.

Como a concavidade da parábola é voltada para cima pois temos a > 0, temos:



2.º) Os valores de x para os quais a inequação é maior que zero, são os valores de x onde a função é positiva, isto é, o conjunto solução. Então:

$$x\in R\setminus\{-3\}$$

Nota: Se o sinal da inequação fosse menor em vez de maior, então, o conjunto solução seria vazio.

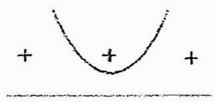
EXEMPLO 4

Resolve a seguinte inequação:

$$x^2+2x+9>0$$

1.º) $x^2+2x+9=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\times1\times9}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{-32}}{2}$ Equação impossível, a função não tem nenhum zero.

Como a concavidade da parábola é voltada para cima pois temos a > 0, temos:



2.º) Os valores de x para os quais a inequação é maior que zero, são os valores de x onde a função é positiva, isto é, o conjunto solução. Então:

$$x\in R$$

Nota: Se o sinal da inequação fosse menor em vez de maior, então, o conjunto solução seria vazio.

Com o auxílio da calculadora gráfica, faz o gráfico das funções definidas nos exemplos. Verifica se os valores de x estão correctos.

Agora já tens conhecimentos suficientes para resolver o problema da área do rectângulo.

EXERCÍCIOS

❶ Sem recorrer à calculadora gráfica, resolve em IR as seguintes inequações:

a) $x^2-5x+6\geq 0$

b) $7+2x-x^2<0$

c) $x^2+3x\leq 2x^2-1$