Janeiro 2008

ESCOLA SECUNDÁRIA ENG. ACÁCIO CALAZANS DUARTE

Curso Profissional de Técnico Man. Ind./ Electromecânica

11º Ano J

Disciplina de Matemática

Polinómios numa variável

Módulo A_5

Funções Racionais

8

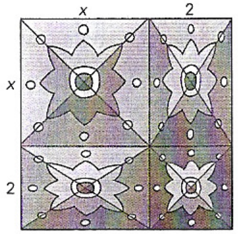
OPERAÇÕES COM POLINÓMIOS

Actividade inicial 1 — Ainda os monómios

Observação

1. Uma expressão algébrica é um número, uma letra ou um conjunto de números e letras ligados por símbolos operacionais e com significado matemático.
2. Um monómio é um número real ou o produto de um número real por uma ou mais variáveis.
3. Grau de um monómio é a soma dos expoentes das letras que nele figuram. Neste estudo vamos considerar apenas monómios numa variável.

Observe a figura ao lado.



A área da figura pode ser dada pela expressão algébrica:

$$x^2+2x+2x+4$$

Como os termos ou **monómios** em x têm a mesma parte literal, isto é, são semelhantes, a expressão pode ser simplificada. Assim, vem:

$$x^2+2x+2x+4=x^2+4x+4 \qquad 2x+2x=x+x+x+x=4x$$

Aos termos desta expressão chamamos monómios.

Num monómio temos a considerar o **coeficiente**, a **parte literal** e o **grau**.

Copie e complete a seguinte tabela.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
x^2	1	x^2	2
$4x$			
4			

Teoria 1 — Polinómios numa variável. Reduzir e ordenar um polinómio

Objectivos

1. Usar a linguagem e a simbologia dos polinómios.
2. Reduzir e ordenar um polinómio.

Monómio numa variável é um número real ou o produto de um número real por uma potência de uma variável em que o expoente é um número inteiro não negativo.

São monómios $2x$; x^5 ; $3x^0$;
Não são monómios x^{-1} ; $2x^{-3}$.

Binómio é a soma de dois monómios não semelhantes.
Trinómio é a soma de três monómios não semelhantes.

São binómios $x+1$; x^2-5x
São trinómios x^3+4x^2+x ; x^5-2x+1

Polinómio é a soma de vários monómios que também se chamam termos do polinómio.

Grau de um polinómio é o grau do seu termo de grau mais elevado.
O polinómio nulo tem grau indeterminado.
$(0=0x^{30}+0x^5$ ou $0=0x^{100}+0x+0)$

De um modo geral:

Um polinómio na variável x, $P(x)$, de grau n é toda a expressão do tipo

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

onde:
- $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$
- $n \in \mathbb{N}_0$

Por exemplo,
$A(x)=2x^3+3x+1 \longrightarrow$ tem grau 3 $\qquad B(x)=2+3x-x^5 \longrightarrow$ tem grau 5

Exemplo 1 — Reduzir e ordenar um polinómio

Observação

1. O grau de um polinómio só deve ser indicado depois de se reduzirem os termos semelhantes.
2. O polinómio do segundo grau $\frac{4}{3}x^2+1$ é incompleto pois o termo em x tem coeficiente nulo:
$$\frac{4}{3}x^2+1=\frac{4}{3}x^2+0x+1 .$$
3. Ao termo 1 do polinómio anterior, também se chama termo independente (o seu valor não depende da variável x).

Reduzir um polinómio é escrevê-lo de forma que não apareçam termos semelhantes.

Ordenar um polinómio é escrevê-lo segundo as potências crescentes ou decrescentes da variável.

1.1 Escreva de forma reduzida e ordenada o polinómio:
$$\frac{x^3+x^2}{3}+x^2+1-\frac{x^3}{3} .$$

1.2 Indique o grau do polinómio referido em **1.1**.

Resolução

1.1 $\dfrac{x^3+x^2}{3}+x^2+1-\dfrac{x^3}{3}=$

$=\cancel{\dfrac{x^3}{3}}+\dfrac{x^2}{3}+x^2+1-\cancel{\dfrac{x^3}{3}} \qquad \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^3}{3}=0$

$=\dfrac{4}{3}x^2+1 \qquad \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{3}{3}x^2=\dfrac{4}{3}x^2$

1.2 O grau do polinómio é 2 .

Verifica 1

1.1 A Inês tinha x maçãs num cesto, deu metade à irmã e 5 ao irmão.

a) Qual é o significado da expressão:
$$x-\frac{1}{2}x-5$$

b) Copie e complete a tabela.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
x			
$-\frac{1}{2}x$			
-5			

c) Escreva três termos semelhantes ao termo $-\frac{1}{2}x$.

d) Reduza o polinómio $x-\frac{1}{2}x-5$.

1.2 Sendo $A(x)=x-2$ e $B(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$, escreva, de uma forma reduzida e ordenada:

a) $A(x)+B(x)$;

b) $A(x)-B(x)$.

1.3 Depois de reduzir e ordenar o polinómio, indique:
- o grau;
- os termos nulos;
- o termo independente.

a) $2x^2+3+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}x+x^4$;

b) $\dfrac{2x^2-2}{2}+x^3-x^2$.

1.4 Escreva um polinómio do 4.° grau, completo, cujos coeficientes sejam números primos.

1.5 Quantos termos tem um polinómio completo de grau n ?

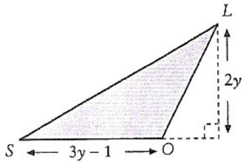
Actividade inicial 2 **Produto de polinómios**

Observe a figura.

2.1 Escreva, em função de y, uma fórmula para a área A do triângulo $[SOL]$.

Apresente a expressão simplificada.

As medidas indicadas estão expressas em centímetros.



2.2 Determine y sabendo que a área do triângulo $[SOL]$ é $70\ \text{cm}^2$.

Teoria 2

Operações com polinómios

Objectivos

1. Operar com polinómios.
2. Aplicar os casos notáveis da multiplicação de binómios.

Adição de polinómios

$(-2x^2+3x-1)+(-5x^2-2x+3)=$

$=-2x^2+3x-1-5x^2-2x+3=$

$=-7x^2+x+2$

Subtracção de polinómios

$(-2x^2+3x-1)-(-5x^2-2x+3)=$

$=-2x^2+3x-1+5x^2+2x-3=$

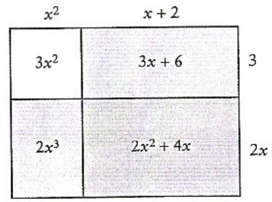
$=3x^2+5x-4$

Multiplicação de polinómios

$(x^2+x+2)(3+2x)=$

$=3x^2+3x+6+2x^3+2x^2+4x=$

$=2x^3+5x^2+7x+6$



Casos notáveis da multiplicação de binómios

Quadrado de um binómio

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

Diferença de quadrados

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

Exemplos:

$\left(2+\frac{x}{3}\right)^2=4+\frac{4}{3}x+\frac{x^2}{9}$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}$

$\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(\frac{1}{2}x+3\right)=\frac{1}{4}x^2-9$

$(3x^2-1)(3x^2+1)=9x^4-1$

Exemplo 2 **Adição, subtracção e multiplicação de polinómios**

2.1 Sendo $A(x)=x^2-1$, $B(x)=\frac{x^3}{3}+3x+1$ e $C(x)=(x-1)^2$, calcule:

a) $A(x)+B(x)$; **b)** $A(x)-C(x)$; **c)** $A(x)\times C(x)$.

2.2 Calcule, aplicando os casos notáveis da multiplicação de binómios:

a) $(2x-3)(2x+3)$; **b)** $\left(\frac{x}{3}-2\right)^2$.

Resolução

2.1 **a)** $(x^2-1)+\left(\frac{x^3}{3}+3x+1\right)=\frac{x^3}{3}+x^2+3x$

b) $x^2-1-(x-1)^2=x^2-1-(x^2-2x+1)=$
$=x^2-1-x^2+2x-1=2x-2$

c) $(x^2-1)(x-1)^2=(x^2-1)(x^2-2x+1)=$
$=x^4-2x^3+x^2-x^2+2x-1=x^4-2x^3+2x-1$

2.2 Os casos notáveis da multiplicação de binómios são:

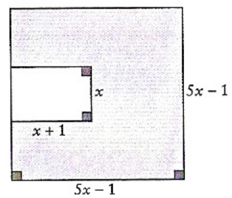
- a diferença de quadrados: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;
- o quadrado do binómio: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

a) $(2x-3)(2x+3)=4x^2-9$; **b)** $\left(\frac{x}{3}-2\right)^2=\frac{x^2}{9}-\frac{4}{3}x+4$.

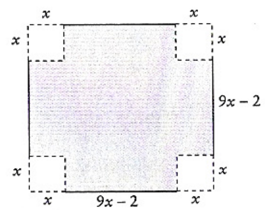
Verifica 2

2.1 Escreva uma fórmula para a área da parte colorida de cada uma das seguintes figuras. Apresente-a na forma de polinómio reduzido.

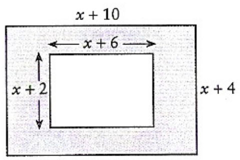
a)



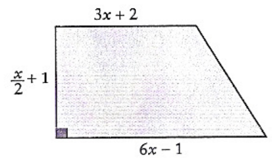
b)



c)

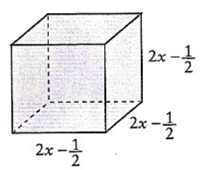


d)

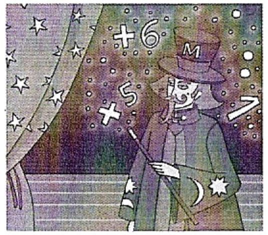


2.2 Calcule:

$\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$



Actividade inicial 3 — O mágico



Pense num número positivo.

Multiplique-o por 5 .

Adicione ao produto o número em que pensou mais 6 .

Divida o resultado pela soma do número em que pensou com 1 .

Sabe qual foi o número que obteve?

O mágico sabe.

Explique, usando expressões algébricas, a situação descrita.

Teoria 3 — Divisão inteira de polinómios

Objectivo

Determinar o quociente e o resto da divisão inteira de dois polinómios.

Recorde

$21 = 5 \times 4 + 1$

$$\text{Dividendo} \rightarrow 21 \;\underline{|\;5\;}\;\text{Divisor}$$
$$\text{Resto} \; 1 \quad 4 \leftarrow \text{Quociente}$$

Dividendo = Divisor × Quociente + Resto

Assim como na divisão inteira de números naturais, efectuar a divisão inteira de um polinómio $A(x)$ por um polinómio $B(x)$ é procurar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$, tais que:

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

sendo o grau de $A(x)$ não inferior ao de $B(x)$ e o grau de $R(x)$ inferior ao grau de $B(x)$ ou $R(x)$ é o polinómio nulo.

Vamos calcular o quociente e o resto da divisão de $x^3 + x^2 - 3x - 3$ por $x + 1$.

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 \quad \underline{|\;x+1\;}$$

Escreve-se ordenadamente o dividendo e o divisor segundo as potências decrescentes de x.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 - 3x - 3 & \underline{x+1} \\ & x^2 \end{array}$$

Dividem-se os termos de maior grau do dividendo e do divisor

$x^3 : x = x^2$

o resultado é o termo de maior grau do quociente.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3} + \cancel{x^2} - 3x - 3 & \underline{x+1} \\ \underline{-\cancel{x^3} - \cancel{x^2}} & x^2 \\ \qquad\quad - 3x - 3 & \end{array}$$

Multiplica-se o divisor pelo termo x^2 e adiciona-se o simétrico do produto ao dividendo.

Dividendo / Divisor

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 - 3x - 3 & \underline{x+1} \\ \underline{-x^3 - x^2} & \underline{x^2 - 3} \\ \qquad\quad - 3x - 3 & \text{Quociente} \\ \qquad\quad \underline{+ 3x + 3} & \\ \qquad\qquad 0 \;\; + 0 \leftarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Repete-se o processo considerando o dividendo o resultado da soma.

$-3x : x = -3$

Então: $x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1)(x^2 - 3) + 0$

Quando o resto da divisão é zero diz-se que o dividendo é divisível pelo divisor ou que o divisor é um factor do dividendo.

Exemplo 3 — Divisão inteira de polinómios

Determine o quociente e o resto da divisão de $A(x) = -6x^3 + 3x^2 + 2$ por $B(x) = 2x^2 + 1$.

Resolução

$$-6x^3 + 3x^2 + 0x + 2 \quad \underline{|\;2x^2+1\;}$$

Escrevem-se, ordenadamente, o dividendo e o divisor segundo as potências decrescentes de x, escrevendo também o termo nulo do dividendo.

$$\begin{array}{l|l} -6x^3 + 3x^2 + 0x + 2 & \underline{2x^2+1} \\ & -3x \end{array}$$

Dividem-se os termos de maior grau do dividendo e do divisor.

$-6x^3 : 2x^2 = -3x$

O resultado é o termo de maior grau do quociente.

$$\begin{array}{l|l} -\cancel{6x^3} + 3x^2 + 0x + 2 & \underline{2x^2+1} \\ \underline{\cancel{6x^3} \qquad\; + 3x} & -3x \\ \qquad 3x^2 + 3x + 2 & \end{array}$$

Multiplica-se o divisor pelo termo de maior grau do quociente, escreve-se o simétrico desse produto e adiciona-se ao dividendo, obtendo assim o resto parcial.

$$\begin{array}{l|l} -6x^3 + 3x^2 + 0x + 2 & \underline{2x^2+1} \\ \underline{6x^3 \qquad\; + 3x} & -3x + \frac{3}{2} \\ \qquad \cancel{3x^2} + 3x + 2 & \\ \qquad \underline{-\cancel{3x^2} \qquad - \frac{3}{2}} & \\ \qquad\qquad 3x + \frac{1}{2} & \end{array}$$

Divide-se o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau do divisor.

$3x^2 : 2x^2 = \frac{3}{2}$

O resultado é o 2.º termo do quociente.

Repete-se, em seguida, todo o processo.

O grau do quociente é a diferença entre o grau do dividendo e o grau do divisor.
O grau do resto é sempre inferior ao grau do divisor.
A divisão terminou porque o resto obtido tem grau inferior ao grau do divisor, ou seja, grau $R(x) <$ grau $B(x)$.

Logo, pode-se escrever:

$$\underbrace{-6x^3 + 3x^2 + 2}_{A(x)} = \underbrace{(2x^2 + 1)}_{B(x)} \underbrace{\left(-3x + \frac{3}{2}\right)}_{Q(x)} + \underbrace{\left(3x + \frac{1}{2}\right)}_{R(x)}.$$

Então, $Q(x) = -3x + \frac{3}{2}$ e $R(x) = 3x + \frac{1}{2}$.

Verifica 3

3.1 Calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $5x^3$ por x^2;

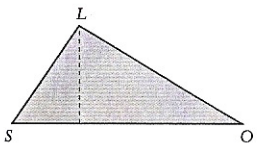
b) $2x^3 + 3x$ por x;

c) $2x - 3$ por $x - 5$;

d) $x^2 + 2x$ por $-x + 1$.

3.2 Defina um polinómio $A(x)$ que dividido por $x^2 + 1$ tem, por quociente, $x - 1$ e resto 1.

3.3 A área de um triângulo $[SOL]$ é dada por $(10x^2 + 6x)\ \text{m}^2$ e a sua base é $(5x + 3)$ m.



Escreva uma expressão para a altura do triângulo.