Muitos problemas relacionados com as mais variadas situações exigem respostas para as quais é necessário, directa ou indirectamente, a resolução de equações e inequações.

Por exemplo:

Admite que uma empresa foi inaugurada no início de 1995. O rendimento ***R*** (lucro ou prejuízo), x anos após a inauguração, é dado em **centenas de milhar de euros** pelo seguinte modelo matemático:

$$R(x)=\frac{2x-5}{x+2}.$$

<u>Questão 1</u>: Quantos após a inauguração da empresa o rendimento obtido foi de meia centena de milhar de euros (50 000 €)?

<u>Questão 2</u>: Durante quanto tempo, após a inauguração da empresa, o rendimento desta foi inferior a 100 000 €?

A resposta à primeira questão pode ser dada recorrendo a processos analíticos e/ou processos gráficos. Ora, independentemente do processo, a resposta a esta questão pressupõe, de uma forma directa ou indirecta, a resolução da equação fraccionária

$$\frac{2x-5}{x+2}=\frac{1}{2}.$$

Relativamente à segunda questão, a resposta a dar será o conjunto-solução da inequação fraccionária $\frac{2x-5}{x+2}<1$, no domínio do contexto do problema.

Resolução:

Questão 1:

- *Resolver a equação* $\frac{2x-5}{x+2}=\frac{1}{2}$ *por processos analíticos:*

$$\frac{2x-5}{x+2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2x-5}{x+2}-\frac{1}{2}=0\,.$$

Reduzindo ao mesmo denominador, tem-se:

$$\frac{2x-5}{x+2_{(\times 2)}}-\frac{1}{2_{\times(x+2)}}=0\Leftrightarrow\frac{4x-10-x-2}{2(x+2)}=0\Leftrightarrow\frac{3x-12}{2(x+2)}=0.$$

A fracção $\frac{3x-12}{2(x+2)}$ **anula-se para os valores de x que anulam o numerador e não anulam o denominador.**

Assim, tem-se:

$$\frac{3x-12}{2(x+2)}=0 \Leftrightarrow 3x-12=0 \wedge 2(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow x=4 \wedge x\neq -2 \Leftrightarrow x=4 .$$

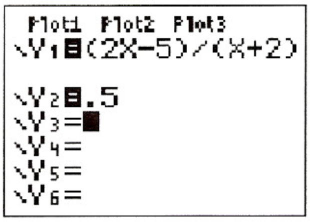
No contexto apresentado, conclui-se que, passados quatro anos após a inauguração da empresa (início de 1999), o rendimento desta foi de 50 000 €.

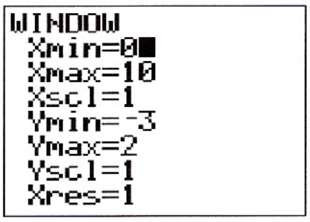
Dados dois polinómios P(x) e Q(x), tem-se:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow P(x)=0 \wedge Q(x)\neq 0$$

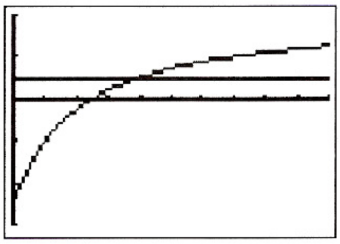
- *Resolver a equação* $\frac{2x-5}{x+2}=\frac{1}{2}$ *por processos gráficos:*

Recorrendo à calculador gráfica, definem-se as funções $y_1=\frac{2x-5}{x+2}$ e $y_2=0{,}5$ e escolhe-se uma Janela adequada, atendendo ao domínio no contexto apresentado.

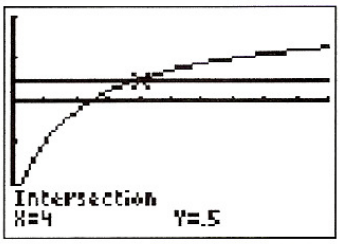




Obtêm-se as seguintes representações gráficas:



De seguida, determinam-se as coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos:



Obtém-se 4 como o valor de x, que é a solução da equação dada.

Questão 2: Durante quanto tempo, após a inauguração da empresa, o rendimento desta foi inferior a 100 000 €?

- Como o rendimento da empresa vem expresso em centenas de milhar de euros, responder a esta questão equivale a resolver a **inequação** $R(x)<1$.

$$R(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+2} - 1 < 0.$$

Reduzindo ao mesmo denominador, tem-se:

$$\frac{2x-5}{x+2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5-x-2}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-7}{x+2} < 0.$$

Os valores de x para os quais a **fracção** $\frac{x-7}{x+2}$ é **negativa** podem ser encontrados através de construção de uma tabela de sinais.

O numerador da fracção anula-se para $x = 7$ e o denominador anula-se para $x = -2$.

Tabela de sinais:

x	$-\infty$	-2		7	$+\infty$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-7}{x+2}$	$+$	S.S.	$-$	0	$+$

NOTA: *A notação **S.S.** utilizada na tabela significa **sem significado**.*

[-2 não pertence ao domínio da expressão $\frac{x-7}{x+2}$]

Por observação à tabela, conclui-se que:

$$\frac{x-7}{x+2} < 0 \Leftrightarrow x \in]-2,7[.$$

No contexto do problema, a variável x é não negativa. Então, tem-se:

$$\frac{x-7}{x+2} < 0 \Leftrightarrow x \in]-2,7[\wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,7[.$$

O rendimento da empresa foi inferior a 100 000 € durante os primeiros sete anos após o início de 1995, ou seja, desde o início de 1995 até ao início de 2002.

****

EXERCÍCIOS:

1. Resolve, em $\Re$, as equações:

1.1. $\frac{x^2+4x}{x-3} = 0$ **1.2.** $\frac{x}{x-2} = -1$ **1.3.** $\frac{2x}{x+1} = x$

2. Determina o conjunto-solução das condições:

2.1. $\frac{x-2}{x+1} > 0$ **2.2.** $\frac{4-x}{2x+1} \geq 0$ **2.3.** $\frac{2x-1}{2-x} \leq 1$

3. Considera as funções racionais f e g definidas por: $f(x) = \frac{-2x}{x^2-9}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2+3x}$.

Resolve:

3.1. a equação $f(x) = g(x)$; **3.2.** $f(x) \geq 0$.