Matemática A

11ºAno

Abril 2009

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

1. Considera as funções f, g e h definidas por:

$$f(x)=|x-2|;\ g(x)=\frac{x}{x^2-4}\ \text{ e }\ h(x)=\begin{cases}1 & se\ x\geq 0\\ 0 & se\ x<0\end{cases}.$$

1.1. Indica o domínio da função $f+g$.

1.2. Representa, sem utilizar módulos, $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$.

1.3. Mostra que 2 é zero da função f e não é zero da função $f\times g$.

1.4. Caracteriza a função $f\times g$.

2. Considera as funções f e g, reais de variável real, definidas por:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-5x+6}\ \text{ e }\ g(x)=\frac{x^2-2x-3}{2x^2+x}.$$

2.1. Simplifica a expressão $f(x)\,.\,g(x)$ e indica o domínio em que é válida a simplificação.

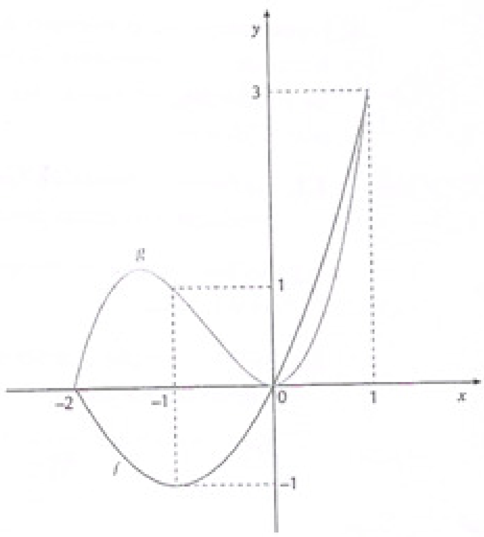
2.2. Caracteriza a função $f\times g$.

2.3. Determina o domínio da função $\frac{f}{g}$.

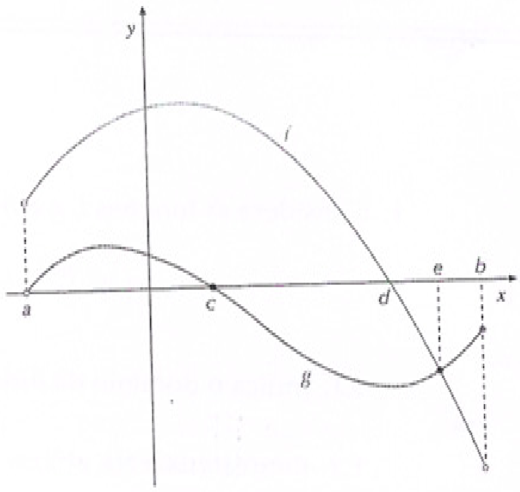
3. No referencial da figura estão representadas duas funções f e g de domínio $[-2, 1]$.

3.1. Estuda o sinal da função $g-f$ e indica o conjunto-solução da condição $(g-f)(x)\geq 0$.

3.2. Resolve a inequação $(f\times g)(x)<0$.



4. No referencial da figura estão representadas duas funções f e g de domínio $[a, b]$.



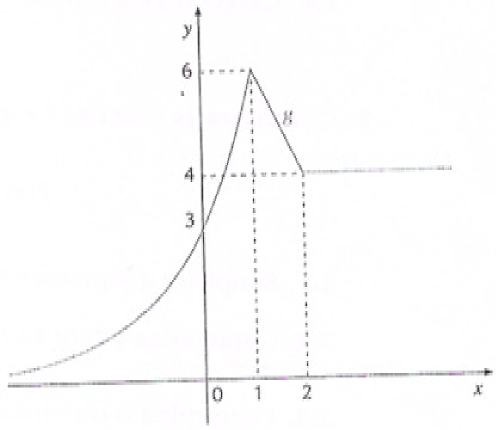
4.1. Constrói um quadro de sinais da função $f - g$.

4.2. Indica o domínio da função $\frac{f}{g}$.

4.3. Determina para que valores de x se tem $f(x) \cdot g(x) > 0$.

4.4. O que podes concluir quanto à monotonia da função $f - g$ no intervalo $]e, b[$?

5. A função f é definida pela expressão $f(x) = x^2 - x$ e a função g está representada no referencial da figura.



5.1. Determina:

5.1.1. $(g \circ f)(1)$;

5.1.2. $(f \circ g)(5)$;

5.1.3. $(g \circ f)(-3)$.

5.2. Determina para que valores de x se tem $(g \circ f)(x) \leq 3$.

6. Numa empresa, o número de peças produzidas por uma máquina, ao fim de t horas de funcionamento, é dado pela função N, definida por $N(t) = t^2 + t$, e o custo de produção, em euros, das n peças produzidas é dado pela função C, definida por $C(n) = 3n + 1$.

6.1. Ao fim de 2 horas de funcionamento da máquina, qual o valor do custo de produção das peças produzidas?

6.2. Ao fim de quanto tempo o custo de produção das peças produzidas é de 91 €?

6.3. Seja P a função que faz corresponder a cada t, tempo em horas de funcionamento da máquina, o custo de produção das peças, em euros.

Determina a expressão $P(t)$.

7. Considera as funções f, g e h definidas por:

$$f(x) = x^3 - 4x, \quad g(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{2x+4}.$$

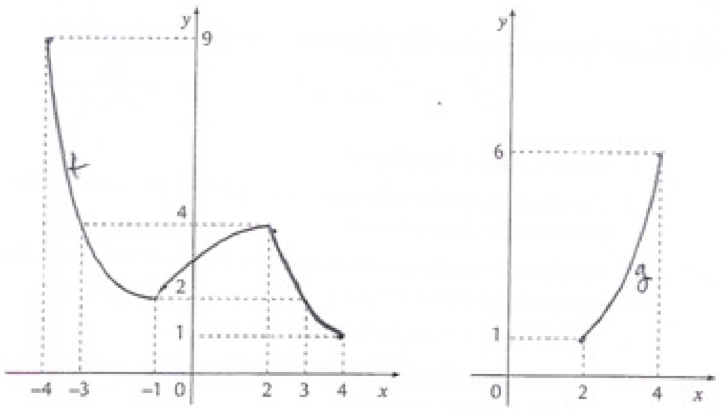
7.1. Caracteriza a função:

7.1.1. $\dfrac{f}{g}$;

7.1.2. $h \circ g$.

7.2. Resolve a inequação $(h \circ g)(x) \leq 0$.

8. Nos referenciais da figura estão representações gráficas das funções f e g de domínios, respectivamente, $[-4, 4]$ e $[2, 4]$.



8.1. Indica o domínio da função $g \circ f$.

8.2. Considera a função h definida por $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Determina o domínio das funções:

8.2.1. $h \circ f$;

8.2.2. $g \circ h$.

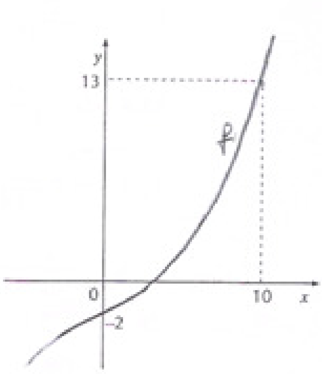
9. Na figura está representada uma função f, injectiva e com domínio $\mathbb{R}$.

Os pontos de coordenadas $(10, 13)$ e $(0, -2)$ pertencem ao gráfico de f.

Seja f^{-1} a função inversa de f.

9.1. Calcula $f^{-1}(-2)$.

9.2. Resolve a equação $f^{-1}(x) = 10$.



10. Numa experiência, um recipiente com água foi exposto a uma fonte de calor durante 10 horas. A quantidade Q, em litros, de água é dada em função de t, em horas, pela expressão $Q=\frac{2}{t+1}$; $t\in[0,10]$.

10.1. Determina a quantidade de água no início e no fim da experiência.

10.2. Por processos exclusivamente analíticos, determina durante quanto tempo a quantidade de água no recipiente variou entre 0,5 litros e 0,25 litros.

10.3. Escreve a expressão que permite obter o tempo t em função da quantidade de água Q.

10.4. Determina ao fim de quanto tempo a quantidade de água no recipiente era 1,6 litros. Apresenta o resultado em minutos.

10.5. No contexto apresentado, faz a representação gráfica:
- da função que permite determinar Q em função de t;
- da função inversa que permite determinar t em função de Q.

11. Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x)=\frac{2x+5}{x+2} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{5x}{x^2+1}.$$

11.1. Mostra que a função f é injectiva.

11.2. Determina as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de f com a bissectriz dos quadrantes ímpares.

11.3. Tendo em conta os resultados da alínea anterior, podes indicar as soluções da equação $f(x)=f^{-1}(x)$? Justifica.

11.4. Caracteriza a função inversa de f.

11.5. Resolve a equação $g(x)=2$. O que podes concluir quanto à existência de função inversa de g?

12. Determina o domínio das expressões:

12.1. $\sqrt{-x^2+4x}$;

12.2. $\frac{2x}{\sqrt{x-2}}$;

12.3. $\sqrt[3]{\frac{2}{x^2-1}}$;

12.4. $\sqrt[3]{x}-\sqrt{\frac{-1}{x}}$;

12.5. $\sqrt{1-\frac{2x}{x+3}}$;

12.6. $\frac{x}{x^2-x-2}-\sqrt{x^2-2x-3}$.

13. Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x)=\frac{1}{x-2} \quad e \quad g(x)=2x-\sqrt{x-1}.$$

13.1. Determina o domínio da função:

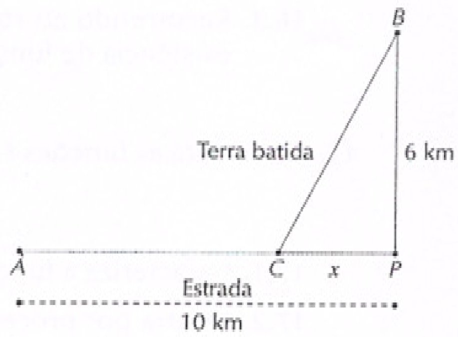
13.1.1. $g \circ f$;

13.1.2. $f \circ g$.

13.2. Resolve a equação $g(x) = 3$.

14. Um carro todo-o-terreno pretende fazer a ligação entre os pontos A e B.

Sabe-se que a velocidade média do percurso feito em estrada (de A a C) é de 50 km/h enquanto a velocidade média do percurso em terra batida é de 40 km/h.



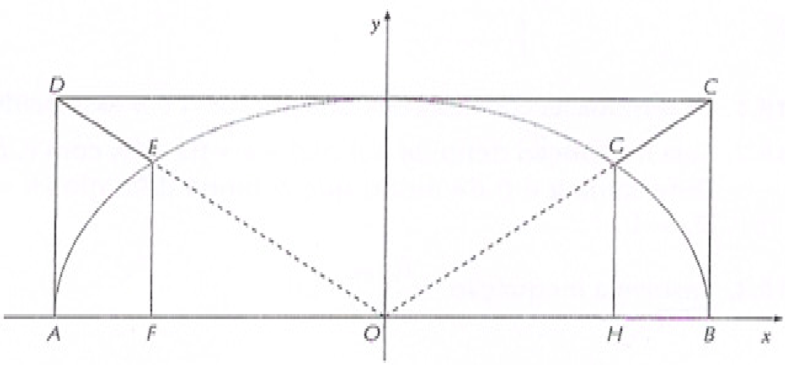
14.1. Se x representar a distância do ponto P ao ponto C, mostra que o tempo t, em horas, gasto na ligação de A a B, passando por C, é dado pela expressão

$$t=\frac{5\sqrt{x^2+36}-4x+40}{200}.$$

14.2. Recorrendo à calculadora, localiza o ponto C, ponto de saída da estrada, para minimizar o tempo gasto na ligação de A a B.

15. O corte da estrutura de uma pequena ponte está representado no referencial da figura, em que a unidade é o metro.

O arco da ponte faz parte da elipse definida pela equação $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.



15.1. Mostra que a representação gráfica do arco da ponte corresponde à função f definida por $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{36-x^2}$.

15.2. Determina:

15.2.1. a altura máxima da ponte;

15.2.2. as coordenadas dos vértices do rectângulo $[ABCD]$.

15.3. Calcula a altura dos pilares $[HG]$ e $[FE]$. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

16. Considera a função f, definida por $f(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2}$.

16.1. Determina o domínio de f.

16.2. Resolve a equação $f(x) = 3$.

16.3. Recorrendo ao resultado obtido em **16.2**, o que podes concluir quanto à existência de função inversa de f? Justifica.

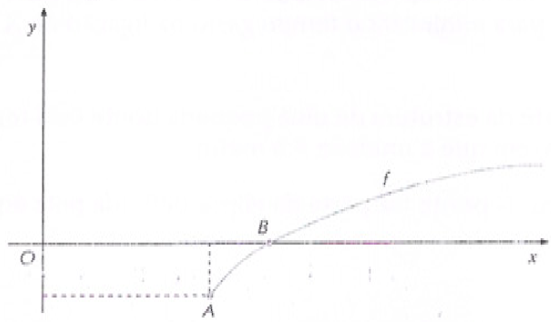
17. Considera as funções f e g, definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \quad e \quad g(x) = \sqrt{x^2+6}.$$

17.1. Caracteriza a função $g - f$.

17.2. Mostra por processos analíticos que 2 pertence ao contradomínio da função $g - f$.

18. Na figura encontra-se representada a função f, definida por $f(x) = -1 + \sqrt{x-3}$.



18.1. Determina as coordenadas dos pontos A e B assinalados na figura.

18.2. Seja h a função definida por $h(x) = a + f(x + b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
Determina a e b de modo que h tenha domínio $[4, +\infty[$ e contradomínio $[5, +\infty[$.

18.3. Resolve a inequação $\dfrac{f(2x)}{-x^2+4x} \leq 0$.

Solução – Operações com funções

1.1. $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$

1.2. $\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x-2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

1.4. $D_{f \times g} = \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$ e $(f \times g) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{se } x > 2 \\ \frac{-x}{x+2} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq -2 \end{cases}$

2.1. $\frac{x+1}{x(x-2)}$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, 2, 3\right\}$

2.2. $f \times g: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, 2, 3\right\} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{x+1}{x(x-2)}$

2.3. $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 2, 3\right\}$

3.1.

x	-2		0		1
$g-f$	0	+	0	−	0

$(g - f)(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 0] \cup \{1\}$

3.2. $x \in]-2, 0[$.

4.1.

x	a		e		b
$f-g$	+	+	0	−	−

4.2. $]a, b]\setminus\{c\}$

4.3. $]a, c[\cup]d, b]$

4.4. É estritamente decrescente em $]e, b[$.

5.1.1. 3

5.1.2. 12

5.1.3. 4

5.2. $x \in [0, 1]$

6.1. 19 €.

6.2. 5 horas.

6.3. $D(t) = 3t^2 + 3t + 1$.

7.1.1. $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{x(x-2)}{x-1}$.

7.1.2. $h \circ g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{2x(x+1)}$.

7.2. $]-1, 0[$

8.1. $[-3, 3]$

8.2.1. $[-4, 4]\setminus\{-1, 3\}$

8.2.2. $\left[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right]$

9.1. 0

9.2. $x = 13$

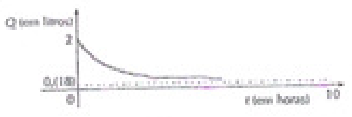
10.1. No início: 2 litros. No fim: 0,18 litros (aproximadamente).

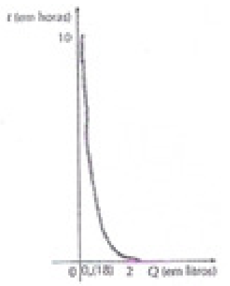
10.2. 4 horas.

10.3. $t = \frac{2-Q}{Q}$.

10.4. 15 minutos.

10.5.





11.2. $\left(\sqrt{5}, \sqrt{5}\right); \left(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$.

11.3. $\left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$. Numa simetria em relação a um eixo os pontos deste são os únicos que ficam invariantes.

11.4. $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$x \to \frac{5-2x}{x-2}$.

11.5. $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$. A função g não admite inversa, atendendo a que não é injectiva. $\frac{1}{2} \neq 2$ e $g\left(\frac{1}{2}\right) = g(2)$.

12.1. $[0, 4]$

12.2. $]2, +\infty[$

12.3. $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$

12.4. $]-\infty, 0[$

12.5. $]-3, 3]$

12.6. $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

13.1.1. $]2, 3]$

13.1.2. $]1, +\infty[\setminus\left\{\frac{5}{4}\right\}$

13.2. 2.

14.2. O ponto C deve ficar a 2 km do ponto A.

15.2.1. 4 m.

15.2.2. $A(-6, 0)$; $B(6, 0)$; $C(6, 4)$ e $D(-6, 4)$.

15.3. 2,83 m.

16.1. $[2, 7]$

16.2. $\{3, 6\}$

16.3. A função f não admite função inversa. A equação $f(x) = 3$ tem duas soluções distintas, o que permite concluir que a função é não injectiva.

17.1. $g - f:]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{x^2+6} - \sqrt{x^2-4}$.

17.2. A equação $(g - f)(x) = 2$ é possível, tem duas soluções: $-\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{2}$

18.1. $A(3; -1)$ e $B(4, 0)$

18.2. $a = 6$ e $b = -1$

18.3. $x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \cup]4, +\infty[$